

BIBLIOTECA CLÁSICA GREDOS, 228

EUCLIDES

ELEMENTOS

LIBROS X-XIII

TRADUCCIÓN Y NOTAS DE
MARÍA LUISA PUERTAS CASTAÑOS



EDITORIAL GREDOS

se
ua-
e las

(infra),
rables en

Asesor para la sección griega: CARLOS GARCÍA GUAL.

Según las normas de la B. C. G., la traducción de este volumen ha sido revisada por PALOMA ORTIZ.

© EDITORIAL GREDOS, S. A.

Sánchez Pacheco, 81, Madrid, 1996.

Depósito Legal: M. 35819-1996.

ISBN 84-249-1463-5. Obra completa.

ISBN 84-249-1830-4. Tomo III.

Impreso en España. Printed in Spain.

Gráficas Cóndor, S. A.

Esteban Terradas, 12. Polígono Industrial. Leganés (Madrid), 1996.

NOTA DE LA TRADUCTORA

Esta entrega de los libros X-XIII completa la traducción de los *Elementos* de Euclides. Mantengo naturalmente el texto griego de referencia y las convenciones que he empleado en las entregas anteriores —véase la nota inicial sobre la traducción de los libros I-IV (Madrid: Gredos [B.C.G. 155], 1991) y V-IX (Madrid: Gredos [B.C.G. 191], 1994).

En el presente caso, el libro X ha seguido siendo la «cruz» de los *Elementos* y, desde luego, una cruz para la traductora. Por fortuna, durante los primeros meses de 1993 pude contar con la paz, las facilidades y los incentivos de Cambridge para dar forma a un primer borrador de la traducción de este libro. Entre esas facilidades e incentivos quiero destacar especialmente la generosidad de Geoffrey Lloyd quien, además, me brindó la oportunidad de hablar de algunos aspectos del libro con los profesores Ian Mueller y David H. Fowler en sus visitas a Cambridge. Una consecuencia ha sido mi opción por traducir el término crucial *álogon* no en la versión tradicional de «irracional», sino en otra versión más contextualizada y explícita, como «no racionalmente expresable», alternativa que no deja de tener repercusiones sobre la interpretación del propósito y del sentido de este espinoso libro X en el marco del tratado. También me parece justo recordar que sin el estímulo y la asistencia de Luis Vega a lo largo de las sucesivas versiones y

correcciones que han ido conformando esta traducción de los *Elementos* y sin sus contribuciones a las notas, la suerte de la empresa habría sido mucho más aventurada. Espero, cuando menos, que la presente edición venga a cumplir el compromiso pendiente en nuestra lengua con esta obra clásica desde la ya lejana traducción inaugural de Rodrigo Zamorano (1576).

LIBRO DÉCIMO

DEFINICIONES

1. Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida, e inconmensurables aquellas de las que no es posible que haya una medida común.
2. Las líneas rectas son conmensurables en cuadrado cuando sus cuadrados se miden con la misma área, e inconmensurables cuando no es posible que sus cuadrados tengan un área como medida común¹.

¹ Traduzco por «conmensurables en cuadrado» la expresión *dynámei symmetroi*. El término *dýnamis* corre la misma suerte que otras muchas expresiones matemáticas griegas: además de la riqueza de sentidos con que cuenta en el uso ordinario, adquiere diversos significados específicos en distintos contextos especializados. Su sentido característico en matemáticas suele ser el que corresponde a la operación o resultado de elevar a la segunda potencia, al cuadrado. Este sentido, cuyo paradigma es el cuadrado construido sobre una recta dada, es el pertinente en los *Elementos*. Cuando aquí se habla de magnitudes conmensurables en cuadrado, las razones consideradas median no entre las magnitudes nombradas sino entre las magnitudes que se derivan de ellas por esa operación. Para comparar, e. g., dos líneas «en cuadrado», Euclides considera las razones de los cuadrados contruidos sobre las líneas en cuestión.

Por otro lado, según hará notar un porisma de la proposición X, 9 (*infra*), todas las rectas conmensurables en longitud (*mékei*) son conmensurables en

correcciones que han ido conformando esta traducción de los *Elementos* y sin sus contribuciones a las notas, la suerte de la empresa habría sido mucho más aventurada. Espero, cuando menos, que la presente edición venga a cumplir el compromiso pendiente en nuestra lengua con esta obra clásica desde la ya lejana traducción inaugural de Rodrigo Zamorano (1576).

LIBRO DÉCIMO

DEFINICIONES

1. Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida, e inconmensurables aquellas de las que no es posible que haya una medida común.
2. Las líneas rectas son conmensurables en cuadrado cuando sus cuadrados se miden con la misma área, e inconmensurables cuando no es posible que sus cuadrados tengan un área como medida común¹.

¹ Traduzco por «conmensurables en cuadrado» la expresión *dynámei symmetroi*. El término *dýnamis* corre la misma suerte que otras muchas expresiones matemáticas griegas: además de la riqueza de sentidos con que cuenta en el uso ordinario, adquiere diversos significados específicos en distintos contextos especializados. Su sentido característico en matemáticas suele ser el que corresponde a la operación o resultado de elevar a la segunda potencia, al cuadrado. Este sentido, cuyo paradigma es el cuadrado construido sobre una recta dada, es el pertinente en los *Elementos*. Cuando aquí se habla de magnitudes conmensurables en cuadrado, las razones consideradas median no entre las magnitudes nombradas sino entre las magnitudes que se derivan de ellas por esa operación. Para comparar, e. g., dos líneas «en cuadrado», Euclides considera las razones de los cuadrados contruidos sobre las líneas en cuestión.

Por otro lado, según hará notar un porisma de la proposición X, 9 (*infra*), todas las rectas conmensurables en longitud (*mékei*) son conmensurables en

3. Dados estos supuestos, se demuestra que hay un número infinito de rectas respectivamente conmensurables e inconmensurables, unas sólo en longitud y otras también en cuadrado con una recta determinada. Llámese entonces racionalmente expresable la recta determinada; y las conmensurables con ella, bien en longitud y en cuadrado, bien sólo en cuadrado, racionalmente expresables y las inconmensurables con ella llámense no racionalmente expresables².

cuadrado; pero no todas las rectas conmensurables en cuadrado, lo son en longitud. Para señalar este segundo caso, Euclides emplea la expresión «conmensurables sólo en cuadrado» (*σύνμετροι δυνάμει μόνον*). Resultan, en suma, estas relaciones: si las magnitudes consideradas (unas rectas dadas) son conmensurables en longitud, también lo son en cuadrado; por tanto, si son inconmensurables en cuadrado, también lo son en longitud; ahora bien, no valen las respectivas conversas, de modo que pueden ser conmensurables en cuadrado, pero no en longitud, y por ende inconmensurables en longitud, pero no en cuadrado.

² Las expresiones «racionalmente expresable» y «no racionalmente expresable» traducen respectivamente *ῥητός* y *ἄλογος*. Una versión más literal como «expresable (*ῥητός*)» y «sin razón (*ἄλογος*)» no trasluce el papel de estos términos como antónimos en el presente contexto matemático. Por ende parece más indicada una versión del tenor de «con razón expresable» / «sin razón expresable»: las expresiones aquí empleadas son una variante preferible por motivos simplemente estilísticos. Con todo, esta versión es un tanto insólita y desafía los usos y costumbres vigentes en la tradición que los vierte por «racional» e «irracional», sin más. Mi versión responde a estos motivos: (1) Trato de evitar las connotaciones habituales en nuestro par «racional / irracional», que llevan a pensar en números y a dar, subrepticamente, un sesgo aritmético al libro X. (2) A esta indebida aritmetización se añade la circunstancia de que «racionalmente expresable (*ῥητός*)» cobra en Euclides un sentido más amplio que nuestro «racional» y, por correspondencia, el sentido de «no racionalmente expresable (*ἄλογος*)» deviene más restringido que «irracional»: sólo carecen de razón expresable las rectas que resultan inconmensurables tanto en longitud como en cuadrado con una recta designada —implícitamente por lo regular— como referencia o parámetro de «expresabilidad racional».

4. Y el cuadrado de la recta determinada (llámese) racionalmente expresable, y los cuadrados conmensurables con éste racionalmente expresables; pero los inconmensurables con él llámense no racionalmente expresables; y las

(3) Aunque no han faltado intentos de reducir el complejo libro X a un lenguaje algebraico más familiar, la interpretación más congruente con el planteamiento de los *Elementos* es la que mantiene su carácter irreduciblemente geométrico. Así que tampoco por esta vía reductiva parece aconsejable la versión tradicional: «racional», «irracional». Sólo cabría, en suma, servirse de estos términos como de una especie de abreviaturas dentro del marco de los supuestos (1)-(3) y sin perder de vista que la matemática griega clásica carece de nuestro concepto de número real, de modo que no comparte nuestro contexto habitual de uso de los términos «racional» e «irracional» en matemáticas.

Este punto guarda relación con el problema general de la interpretación del libro X, que arrastra desde Simon Stevin (1585) el apelativo de «cruz de los matemáticos» —sobre el sentido que puede tener aún esta denominación, cf. «Introducción general» en el primer tomo, *Elementos. Libros I-IV*, págs. 88-89—. Dada la complicada y oscura organización del libro, no faltan propuestas sobre su motivación y su sentido. Por ejemplo, según B. L. VAN DER WAERDEN (*Science Awakening*, Nueva York, 1963, edic. rev.), el libro responde al problema de determinar cuándo la raíz de ciertas líneas irracionales es un irracional del mismo tipo (págs. 168-172), y sigue una línea puramente algebraica de pensamiento (pág. 178). Según I. MUELLER (*Philosophy of Mathematics...*, op. cit. en la «Introducción general», pág. 184), el libro carece de una motivación intuitiva clara y parece dedicado a elaborar una clasificación de líneas irracionales en respuesta al problema de la construcción del icosaedro en XIII, 16. C. M. TAISBAK (*Coloured Quadrangles*, citado en «Introducción general», nota 27, págs. 88-89), el libro X se centra en el estudio de las relaciones entre los lados y diagonales del decágono, el hexágono y el pentágono regulares con el diámetro del círculo circunscrito, conforme a un determinado patrón de conmensurabilidad/inconmensurabilidad. Esta interpretación es sostenida por D. H. FOWLER (*The Mathematics of Plato's Academy*, cit. ibidem; «An Invitation to Read Book X of Euclid's *Elements*», *Historia Mathematica* 19 (1992), 233-264). En una línea similar se mueve la interpretación de W. R. KNORR («La croix des mathématiciens...», cit. ibidem), aunque tiende a marcar el acento sobre el caso del pentágono regular. En todo caso, creo que la lectura geométrica en la que convienen Taishak, Fowler y Knorr es la que mejor cuadra con el

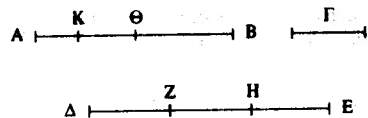
rectas que los producen (llámense) no racionalmente expresables, a saber, si fueran cuadrados, los propios lados y si fueran otras figuras rectilíneas, aquellas (rectas) que construyan cuadrados iguales a ellos³.

PROPOSICIÓN I

Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Sean AB, Γ dos magnitudes desiguales de las cuales AB es la mayor.

Digo que, si se quita de AB una (magnitud) mayor que su mitad y de la (magnitud) restante, una (magnitud) mayor que su mitad, y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud Γ .



Pues Γ multiplicada será alguna vez mayor que AB [V Def. 4]. Multiplíquese y sea ΔE un múltiplo de Γ mayor que AB; divídase ΔE en ΔZ , ZH , HE

planteamiento del libro y con su lugar de encrucijada en los *Elementos*. Por lo demás, en los trabajos citados hay cuadros y esquemas de las diversas clasificaciones de rectas con o sin razón expresable, que resumen los resultados del libro y que no puedo recoger aquí.

³ Un área resulta «racionalmente expresable» o «no racionalmente expresable» según sea conmensurable o no con el cuadrado de una recta predeterminada como expresable. La misma condición se extiende bien a sus lados, si el área en cuestión es un cuadrado, o bien a los lados de un cuadrado de área igual, si se trata de otra figura.

iguales a Γ , y de AB quítese $B\Theta$ mayor que su mitad, y de $A\Theta$ (quítese) ΘK mayor que su mitad, y así sucesivamente hasta que las divisiones de AB lleguen a ser iguales en número a las divisiones de ΔE .

Sean, pues, AK, $K\Theta$, ΘB divisiones que son iguales en número a las (divisiones) ΔZ , ZH , HE ; ahora bien, dado que ΔE es mayor que AB y que de ΔE se ha quitado la (magnitud) EH menor que su mitad y de AB la (magnitud) $B\Theta$ mayor que su mitad, entonces la magnitud restante $H\Delta$ es mayor que la (magnitud) restante ΘA . Y dado que $H\Delta$ es mayor que ΘA y se ha quitado de $H\Delta$ su mitad HZ y de ΘA una (magnitud) ΘK mayor que su mitad, entonces la (magnitud) restante ΔZ es mayor que la (magnitud) restante AK. Pero ΔZ es igual a Γ ; luego es mayor que AK. Por tanto, AK es menor que Γ .

Por consiguiente, de la magnitud AB queda la magnitud AK que es menor que la magnitud dada Γ . Q. E. D. De manera semejante demostraríamos que (esto ocurre) también si se quita la mitad⁴.

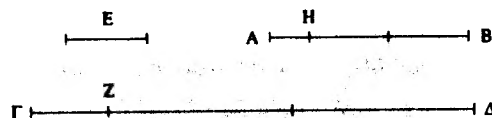
Vierito *hai dynámenai* como «las rectas que los producen». *Dynamēnē* suele traducirse por «raíz cuadrada», pero esta versión incurre en el sesgo aritmético ya denunciado. Así que prefiero mantener la referencia al lado (base) del cuadrado producido. Sobre la expresión *tetrágōna anagráphousai* («rectas que construyen cuadrados»), cf. nota 61 del libro I en *Elementos. Libros I-IV*, pág. 259.

⁴ Este teorema reviste especial importancia aunque apenas preste servicio hasta las proposiciones del libro XII que emplean el llamado «método de exhaustión». Su situación aquí puede justificarse como paso previo a X, 2, donde se muestra el procedimiento para determinar si dos magnitudes son conmensurables o incommensurables. El relieve de X, 1 descansa en su papel como principio básico del método ya mencionado de «exhaustión». Se asemeja a la quinta asunción de Arquímedes en *Sobre la esfera y el cilindro* y recuerda así mismo un lema del propio Arquímedes en *La cuadratura de la parábola*. Reza el lema: «El exceso de la mayor de dos áreas desiguales sobre la menor (es una magnitud que) puede sobrepasar, si es añadida a sí misma

PROPOSICIÓN 2

Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la restante nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables.

Habiendo, pues, dos magnitudes desiguales AB , $\Gamma\Delta$ y (siendo) AB la menor, al restar sucesivamente la menor de la mayor, no mida nunca la (magnitud) restante a la anterior a ella.



(cuantas veces se requiera), cualquier área finita dada». Y a renglón seguido dice Arquímedes que los geómetras anteriores no dejaron de apelar a este lema, pues fue a través de él como establecieron que los círculos guardan entre sí la razón de los cuadrados de sus diámetros (XII 2), las esferas guardan entre sí la razón de los cubos de sus diámetros (XII 18), toda pirámide es equivalente a la tercera parte de un prisma con la misma base y altura (XII 7) y todo cono es equivalente a la tercera parte de un cilindro con la misma base y altura (XII 10) —cf. *La cuadratura de la parábola*, prefacio a Dositeo, edic. CH. MUGLER, París, 1971; t. II, 165.6-18—. Esa referencia al uso anterior del lema halla confirmación en algunas alusiones de ARISTÓTELES en análogo sentido (*Física*, 266b2, 207b10). Todo ello apunta a Eudoxo: es probable que un supuesto similar a X 1 ya hubiera obrado en algunos de esos resultados de Eudoxo recogidos por Euclides en el libro XII. Pero un supuesto *similar* no es el *mismo* supuesto. La asunción y el lema de Arquímedes, a quien suele suponerse más respetuoso con Eudoxo que con el propio Euclides, hacen referencia a la adición, mientras que Euclides se atiene a la sustracción, en la perspectiva del algoritmo antifairético de sustracción recíproca, y prefiere operar —al menos en principio— en términos de bisecciones. Sobre este algoritmo recuérdense las proposiciones 2, 3 del libro VIII.

Digo que las magnitudes AB , $\Gamma\Delta$ son inconmensurables.

Pues, si son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Médalas (una magnitud), si es posible, y sea E ; y AB , al medir a ΔZ , deje la magnitud ΓZ menor que ella, y ΓZ , al medir a BH , deje AH menor que ella, y repítase así sucesivamente hasta que quede una magnitud que sea menor que E . Sea así y quede AH menor que E . Así pues, como E mide a AB y AB mide a ΔZ , entonces E también medirá a ΔZ . Pero mide también a la magnitud entera $\Gamma\Delta$; luego medirá también a la magnitud restante ΓZ . Ahora bien, ΓZ mide a BH ; entonces E también mide a BH . Pero mide también a la (magnitud) entera AB ; así que medirá también a la (magnitud) restante AH , la mayor a la menor; lo cual es imposible. Luego ninguna magnitud medirá a las magnitudes AB , $\Gamma\Delta$; por tanto, las magnitudes AB , $\Gamma\Delta$ son inconmensurables [X Def. 1].

Por consiguiente, si de dos magnitudes desiguales..., etc. 5.

PROPOSICIÓN 3

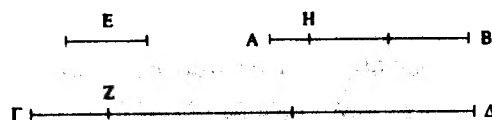
Dadas dos magnitudes conmensurables, hallar su medida común máxima.

⁵ X 2 muestra uno de los usos más metódicos —digamos— que operativos del procedimiento antifairético, *i. e.*, su uso como criterio de conmensurabilidad/inconmensurabilidad. Conforme a este criterio, dos magnitudes son conmensurables si y sólo si cabe determinar efectivamente, por el procedimiento antifairético, la existencia de medida común. Por ende, siempre que la serie de sustracciones recíprocas proceda indefinidamente sin llegar a un resultado efectivo, tendremos una señal de que las magnitudes en cuestión son inconmensurables. En otras palabras, la efectividad o la no efectividad del algoritmo antifairético es una condición que determina respectivamente la conmensurabilidad o la inconmensurabilidad.

PROPOSICIÓN 2

Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la restante nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables.

Habiendo, pues, dos magnitudes desiguales AB , $\Gamma\Delta$ y (siendo) AB la menor, al restar sucesivamente la menor de la mayor, no mida nunca la (magnitud) restante a la anterior a ella.



(cuantas veces se requiera), cualquier área finita dada». Y a renglón seguido dice Arquímedes que los geómetras anteriores no dejaron de apelar a este lema, pues fue a través de él como establecieron que los círculos guardan entre sí la razón de los cuadrados de sus diámetros (XII 2), las esferas guardan entre sí la razón de los cubos de sus diámetros (XII 18), toda pirámide es equivalente a la tercera parte de un prisma con la misma base y altura (XII 7) y todo cono es equivalente a la tercera parte de un cilindro con la misma base y altura (XII 10) —cf. *La cuadratura de la parábola*, prefacio a Dositeo, edic. CH. MUGLER, París, 1971; t. II, 165.6-18—. Esa referencia al uso anterior del lema halla confirmación en algunas alusiones de ARISTÓTELES en análogo sentido (*Física*, 266b2, 207b10). Todo ello apunta a Eudoxo: es probable que un supuesto similar a X 1 ya hubiera obrado en algunos de esos resultados de Eudoxo recogidos por Euclides en el libro XII. Pero un supuesto *similar* no es el *mismo* supuesto. La asunción y el lema de Arquímedes, a quien suele suponerse más respetuoso con Eudoxo que con el propio Euclides, hacen referencia a la adición, mientras que Euclides se atiene a la sustracción, en la perspectiva del algoritmo antifairético de sustracción recíproca, y prefiere operar —al menos en principio— en términos de bisecciones. Sobre este algoritmo recuérdense las proposiciones 2, 3 del libro VIII.

Digo que las magnitudes AB , $\Gamma\Delta$ son inconmensurables.

Pues, si son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Médalas (una magnitud), si es posible, y sea E ; y AB , al medir a ΔZ , deje la magnitud ΓZ menor que ella, y ΓZ , al medir a BH , deje AH menor que ella, y repítase así sucesivamente hasta que quede una magnitud que sea menor que E . Sea así y quede AH menor que E . Así pues, como E mide a AB y AB mide a ΔZ , entonces E también medirá a ΔZ . Pero mide también a la magnitud entera $\Gamma\Delta$; luego medirá también a la magnitud restante ΓZ . Ahora bien, ΓZ mide a BH ; entonces E también mide a BH . Pero mide también a la (magnitud) entera AB ; así que medirá también a la (magnitud) restante AH , la mayor a la menor; lo cual es imposible. Luego ninguna magnitud medirá a las magnitudes AB , $\Gamma\Delta$; por tanto, las magnitudes AB , $\Gamma\Delta$ son inconmensurables [X Def. 1].

Por consiguiente, si de dos magnitudes desiguales..., etc. ⁵.

PROPOSICIÓN 3

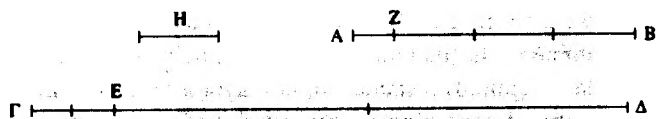
Dadas dos magnitudes conmensurables, hallar su medida común máxima.

⁵ X 2 muestra uno de los usos más metódicos —digamos— que operativos del procedimiento antifairético, *i. e.*, su uso como criterio de conmensurabilidad/inconmensurabilidad. Conforme a este criterio, dos magnitudes son conmensurables si y sólo si cabe determinar efectivamente, por el procedimiento antifairético, la existencia de medida común. Por ende, siempre que la serie de sustracciones recíprocas proceda indefinidamente sin llegar a un resultado efectivo, tendremos una señal de que las magnitudes en cuestión son inconmensurables. En otras palabras, la efectividad o la no efectividad del algoritmo antifairético es una condición que determina respectivamente la conmensurabilidad o la inconmensurabilidad.

Sean AB , $\Gamma\Delta$ dos magnitudes dadas conmensurables, de las cuales AB sea la menor.

Así pues, hay que hallar la medida común máxima de AB , $\Gamma\Delta$.

Pues bien, AB o mide a $\Gamma\Delta$ o no la mide. Si, en efecto, la mide y se mide también a sí misma, entonces AB es una medida común de AB , $\Gamma\Delta$; y está claro que también es la mayor. Porque no medirá a AB ninguna magnitud mayor que AB .



Pero ahora no mida AB a $\Gamma\Delta$ y, al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor, la (magnitud) restante medirá alguna vez a la anterior a ella, porque AB , $\Gamma\Delta$ no son inconmensurables [X 2]; y AB , al medir a $E\Delta$, deje la (magnitud) EF menor que ella, y EF , al medir a ZB , deje la (magnitud) AZ menor que ella y mida AZ a ΓE .

Como, en efecto, AZ mide a ΓE , mientras que ΓE mide a ZB , entonces AZ medirá también a ZB . Pero también se mide a sí misma; luego AZ medirá también a la (magnitud) entera AB . Ahora bien, AB mide a ΔE ; entonces AZ medirá también a $E\Delta$. Pero mide también a ΓE ; luego mide también a la (magnitud) entera $\Gamma\Delta$; por tanto, AZ es una medida común de AB , $\Gamma\Delta$.

Digo ahora que también es la mayor. Pues, si no, habrá una magnitud mayor que AZ que medirá a AB , $\Gamma\Delta$. Sea H . Así pues, dado que H mide a AB , mientras que AB mide a $E\Delta$, entonces H medirá a $E\Delta$. Pero mide también a la (magnitud) entera $\Gamma\Delta$; luego H medirá también a la (magnitud) restante ΓE . Pero ΓE mide a ZB ; luego H medirá también a ZB . Pero también mide a la (magnitud) entera AB y medirá también a la (magnitud) restan-

te AZ , la mayor a la menor; lo cual es imposible. Luego ninguna magnitud mayor que AZ medirá a AB , $\Gamma\Delta$; por tanto AZ es la medida común máxima de AB , $\Gamma\Delta$.

Por consiguiente, se ha hallado la medida común máxima, AZ , de las dos magnitudes dadas AB , $\Gamma\Delta$. Q. E. D.

Porisma:

A partir de esto queda claro que, si una magnitud mide a dos magnitudes, medirá también a su medida común máxima ⁶.

PROPOSICIÓN 4

Dadas tres magnitudes conmensurables, hallar su medida común máxima.

Sean A , B , Γ las tres magnitudes conmensurables dadas.

Así pues, hay que hallar la medida común máxima de A , B , Γ .

Tómese, pues, la medida común máxima de A , B y sea Δ [X 3]. Pues bien, o Δ mide a Γ o no la mide. En primer lugar, médala. Así pues Δ mide a Γ , y mide también a A , B , entonces Δ mide a A , B , Γ ; por tanto Δ es una medida común de A , B , Γ . Y está claro que también la mayor, porque una magnitud mayor que la magnitud Δ no mide a A , B .

No mida ahora Δ a Γ .

⁶ X 3 aplica a las magnitudes el procedimiento empleado en VII 2 para los números. Sobre la proyección histórica y las modernas aplicaciones de este algoritmo euclídeo, cf. J. L. CHABERT *et alii*, *Histoire d'algorithmes*, París, 1993; cap. 4, págs. 129-158.

Digo en primer lugar que Γ , Δ son conmensurables.

Porque como A, B, Γ son conmensurables, las medirá alguna magnitud que evidentemente medirá también a A, B⁷; de modo que la medida común máxima de A, B medirá también a Δ . Y mide también a Γ ; de modo que la antedicha magnitud medirá también a Δ , la medida común máxima de A, B [X 3 Por.], luego Γ , Δ son conmensurables.

Pues bien, tómese su medida común máxima y sea E [X 3]. Así pues, dado que E mide a Δ , mientras que Δ mide a A, B, entonces E medirá también a A, B. Pero mide también a Γ . Luego E mide a A, B, Γ ; por tanto E es una medida común de A, B, Γ .

Digo ahora que también la mayor.

Pues, si es posible, sea Z una magnitud mayor que E y mida a A, B, Γ . Ahora bien, puesto que Z mide a A, B, Γ , entonces medirá también a A, B y a la medida común máxima de A, B [X 3 Por.]. Pero la medida común máxima de A, B es Δ ; entonces Z mide a Δ . Pero mide también a Γ ; luego Z mide a Δ . Y mide también a Γ . Por tanto Z mide a Γ , Δ ; entonces Z medirá también a la medida común máxima de Γ , Δ [X 3 Por.]. Pero es E; luego Z medirá a E, la mayor a la menor; lo cual es imposible. Por tanto, ninguna (magnitud) mayor que la magnitud E mide a A, B, Γ ; luego la medida común máxima de A, B, Γ es E, si Δ no mide a Γ , y si la mide, es la propia (magnitud) Δ .

Por consiguiente, se ha hallado la medida común máxima de las tres magnitudes conmensurables dadas.

Porisma:

A partir de esto queda claro que, si una magnitud mide a tres magnitudes, medirá también a su medida común máxima.

De manera semejante se hallará la medida común máxima de más magnitudes y se extenderá el porisma. Q. E. D.⁷

⁷ Esta proposición, al igual que la anterior con VII 2, coincide literalmente con VII 3, substituyendo número por magnitud.

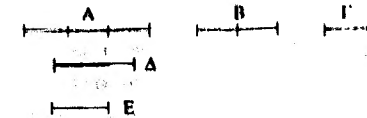
PROPOSICIÓN 5

Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número.

Sean A, B magnitudes conmensurables.

Digo que A guarda con B la misma razón que un número con un número.

Pues, como A, B son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Médalas una magnitud y sea Γ . Y cuantas veces Γ mida



a A, tantas unidades haya en Δ , y cuantas veces Γ mida a B, tantas unidades haya en E.

Así pues, dado que Γ mide a A según las unidades de Δ y la unidad mide a Δ según sus unidades, entonces la unidad mide al número Δ el mismo número de veces que la magnitud Γ a la (magnitud) A; luego, como Γ es a A, así la unidad es a Δ [VII Def. 20]; entonces, por inversión, como A es a Γ , así Δ a la unidad [V 7 Por.]. Como Γ mide a su vez a Δ según las unidades de E, mientras que la unidad mide también a E según sus unidades, entonces la unidad mide a E el mismo número de veces que Γ a B. Luego, como Γ es a B, así la unidad es al (número) E. Pero se ha demostrado que también como A es a Γ , Δ es a la unidad. Luego, por igualdad, como A es a B, así el número Δ es al (número) E [V 22].

Por consiguiente, las magnitudes conmensurables A, B

guardan entre sí la misma razón que el número Δ con el número E. Q. E. D.⁸

PROPOSICIÓN 6

Si dos magnitudes guardan entre sí la razón que un número (guarda) con un número, las magnitudes serán conmensurables.

Guarden, pues, las dos magnitudes A, B entre sí la razón que el número Δ (guarda) con el número E.

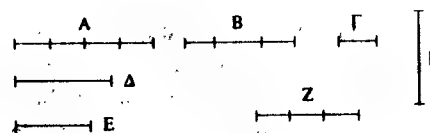
Digo que las magnitudes A, B son conmensurables.

Pues divídase A en tantas (magnitudes) iguales como unidades hay en Δ , y sea Γ igual a una de ellas; y compóngase Z de tantas unidades iguales a Γ como unidades hay en E.

Así pues, dado que, cuantas unidades hay en Δ , tantas magnitudes iguales a Γ hay en A, entonces, la parte que la unidad es de Δ , la misma parte es también Γ de A; luego, como Γ es a A, así

⁸ La prueba descansa, en parte, sobre la noción de proporción prevista para los números y en el supuesto tácito de que los términos que sean proporcionales en el sentido de la def. 20 del libro VII, también lo serán en el sentido generalizado de la def. 5 del libro V. Euclides, después de dar dos caracterizaciones autónomas y separadas de la proporcionalidad, una para las magnitudes en el libro V y otra para los números en el libro VII, viene a suponer que las segundas pueden considerarse un caso particular de las primeras. De una relación similar entre magnitudes y números ya se había hecho eco ARISTÓTELES (*Analíticos Segundos*, 74a17, 75b4-5). Pero esta correspondencia entre las magnitudes conmensurables y los números no deja de resultar ahora un tanto inesperada. Se ha llegado a decir que la falta de una correlación expresa entre unas y otros, antes del libro X, constituye probablemente la mayor laguna de los *Elementos* en cuestión de fundamentos (I. MUELLER, *op. cit.*, pág. 138). SIMSON, por su parte, procura establecer esa correspondencia a partir de una proposición C intercalada en el libro V (*vid. edic. cit.*, págs. 122 y 313-314).

la unidad es a Δ [VII Def. 20]. Pero la unidad mide al número Δ ; entonces también Γ mide a A. Ahora bien, dado que, como Γ es a



A, así la unidad es al (número) Δ , entonces, por inversión, como A es a Γ , así el número Δ es a la unidad [V 7 Por.]. Y puesto que, cuantas unidades hay en E, tantas hay a su vez en Z iguales a Γ , entonces como Γ es a Z, así la unidad es al (número) E [VII Def. 20]. Pero se ha demostrado que también como A es a Γ , así Δ a la unidad; entonces, por igualdad, como A es a Z, así Δ a E [V 22]; ahora bien, como Δ es a E, así A a B; entonces, como A es a B, así también a Z [V 11]. Luego A guarda la misma razón con cada una de las (magnitudes) B, Z; por tanto, B es igual a Z [V 9]. Pero Γ mide a Z; luego mide también a B. Pero también a A; luego Γ mide a A, B. Por tanto, A es conmensurable con B.

Por consiguiente, si dos magnitudes guardan entre sí..., etc.
Porisma:

A partir de esto queda claro que, si hay dos números, como Δ , E, y una recta, como A, es posible hacer una recta [Z] que sea a la recta como el número Δ es al número E. Pero, si se toma una media proporcional de A, Z, como B, como A es a Z, así el cuadrado de A será al cuadrado de B, es decir que como la primera es a la tercera, así la (figura) construida sobre la primera es a la figura semejante y construida de manera semejante sobre la segunda [VI 19 Por.]. Pero como A es a Z, así el número Δ es al número E; entonces como el número Δ es al número E, así también la figura construida sobre la recta A⁹ a la figura construida sobre la recta B. Q. E. D.

⁹ *Tò apò tēs A eutheías*, «la (figura construida) sobre la recta A».

PROPOSICIÓN 7

Las magnitudes inconmensurables no guardan entre sí la razón que un número guarda con un número.

Sean A, B, magnitudes inconmensurables.

Digo que A no guarda con B la razón que un número guarda con un número.

Pues, si A guarda con B la razón que un número guarda con un número, A será conmensurable con B [X 6]. Pero no lo es; por tanto, A no guarda con B la razón que un número guarda con un número.

Por consiguiente, las magnitudes inconmensurables no guardan entre sí la razón..., etc.

PROPOSICIÓN 8

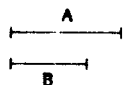
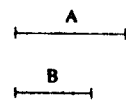
Si dos magnitudes no guardan entre sí la razón que un número guarda con un número, las magnitudes serán inconmensurables.

No guarden, pues, entre sí las dos magnitudes A, B la razón que un número guarda con un número.

Digo que las magnitudes A, B son inconmensurables.

Pues, si son conmensurables, A guardará con B la razón que un número guarda con un número [X 5]. Pero no la guarda. por tanto, las magnitudes A, B son inconmensurables.

Por consiguiente, si dos magnitudes guardan entre sí..., etc.



PROPOSICIÓN 9

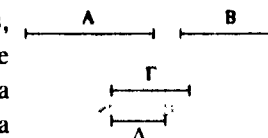
Los cuadrados de rectas conmensurables en longitud guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y los cuadrados que guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado tendrán también los lados conmensurables en longitud. Pero los cuadrados de las rectas inconmensurables en longitud no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, y los cuadrados que no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado tampoco tendrán los lados conmensurables en longitud.

Sean, pues, A, B conmensurables en longitud.

Digo que el cuadrado de A guarda con el cuadrado de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Pues como A es conmensurable en longitud con B, entonces A guarda con B la razón que un número guarda con un número [X 5]. Guarde la razón de Γ a Δ .

Pues bien, dado que, como A es a B, así Γ a Δ , mientras que el cuadrado de A guarda con el cuadrado de B una razón duplicada de la que A guarda con B, porque las figuras semejantes guardan una razón duplicada de la de sus lados correspondientes [VI 20 Por.]; y dado que el cuadrado de Γ guarda con el cuadrado de Δ una razón duplicada de la que Γ guarda con Δ , porque entre dos números cuadrados hay un número que es media proporcional, y el número cuadrado guarda con el número cuadrado una razón duplicada de la que el lado guarda



con el lado [VIII 11]; luego como el cuadrado de A es al cuadrado de B, así el cuadrado de Γ es al cuadrado de Δ .

Pero ahora, como el cuadrado de A es al cuadrado de B, sea así el cuadrado de Γ al cuadrado de Δ .

Digo que A es conmensurable en longitud con B.

Pues, dado que, como el cuadrado de A es al cuadrado de B, así el cuadrado de Γ al de Δ , mientras que el cuadrado de A guarda con el cuadrado de B una razón duplicada de la que A guarda con B, y el cuadrado de Γ guarda con el cuadrado de Δ una razón duplicada de la que Γ guarda con Δ , entonces, como A es a B, así Γ a Δ . Luego A guarda con B la razón que el número Γ guarda con el número Δ . Por tanto A es conmensurable en longitud con B [X 6].

Sea ahora A inconmensurable en longitud con B.

Digo que el cuadrado de A no guarda con el de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Pues si el cuadrado de A guarda con el de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, A será conmensurable con B. Pero no lo es; luego el cuadrado de A no guarda con el cuadrado de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

No guarde ahora el cuadrado de A con el cuadrado de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Digo que A es inconmensurable en longitud con B.

Pues si A es conmensurable con B, el cuadrado de A guardará con el cuadrado de B la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, pero no la guarda; luego A no es conmensurable en longitud con B.

Por consiguiente, los cuadrados de (rectas) conmensurables en longitud, etc.¹⁰.

¹⁰ Un escolio a esta proposición (*Schol. X*, núm. 26) afirma que este teorema fue descubierto por Teeteto.

Porisma:

Y a partir de lo demostrado quedará claro que las rectas conmensurables en longitud también lo son siempre en cuadrado, mientras que las conmensurables en cuadrado no lo son siempre en longitud¹¹.

LEMA

Se ha demostrado en los libros de aritmética que los números planos semejantes guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado [VIII 26], y que si dos números guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, son números planos semejantes [VIII 26 *conversa*]. Y es evidente a partir de esto que los números planos no semejantes, es decir los que no tienen los lados proporcionales, no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; pues, si la guardan, serán planos semejantes; lo cual precisamente se ha supuesto que no; luego los números planos no semejantes no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado¹².

¹¹ Heiberg atetiza cuatro párrafos situados a continuación del porisma por considerarlos superfluos e impropios del proceder habitual de Euclides. Un resumen del contenido de estos párrafos, no incluidos en el presente texto, puede ser el siguiente:

Tras una especie de prueba o explicación del porisma, se establece y explica que las rectas inconmensurables en longitud no son necesariamente inconmensurables también en cuadrado y que, sin embargo, aquellas rectas que son inconmensurables en cuadrado son siempre inconmensurables en longitud.

¹² Lema sospechoso. HEATH lo atetiza (*edic. cit.*, III, pág. 30). Sin embargo Heiberg lo mantiene pese a sus reservas, algunas de las cuales hacen referencia a la proposición siguiente. Cf. nota 13.

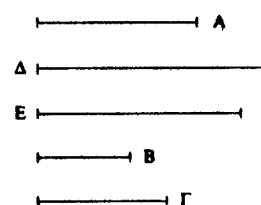
PROPOSICIÓN 10

Hallar dos rectas inconmensurables, una sólo en longitud, otra también en cuadrado, con una recta determinada.

Sea A la recta determinada.

Así pues, hay que hallar dos rectas inconmensurables, una sólo en longitud, otra también en cuadrado, con la recta determinada A.

Tómense, pues, dos números B, Γ que no guarden entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cua-



drado, es decir que no sean números planos semejantes y hágase de forma que, como B es a Γ , así el cuadrado de A al cuadrado de Δ , pues hemos aprendido (a hacerlo) [X 6 Por.]; entonces, el cuadrado de A es conmensurable con el cuadrado de Δ [X 6]. Ahora bien, dado que B no

guarda con Γ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el cuadrado de A tampoco guarda con el cuadrado de Δ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego A es inconmensurable en longitud con Δ [X 9].

Tómese la media proporcional E de A, Δ ; entonces, como A es a Δ , así el cuadrado de A es al cuadrado de E [V Def. 9]. Pero A es inconmensurable en longitud con Δ ; luego el cuadrado de A es también inconmensurable con el cuadrado de E [X 11]; por tanto A es inconmensurable en cuadrado con E.

Por consiguiente, se han hallado dos rectas inconmensurables, A, E, una, A, sólo en longitud y la otra, E, en cuadrado

y también obviamente en longitud, con la recta determinada A ¹³.

PROPOSICIÓN 11

Si cuatro magnitudes son proporcionales y la primera es conmensurable con la segunda, también la tercera será conmensurable con la cuarta, y si la primera es inconmensurable con la segunda, la tercera será también inconmensurable con la cuarta.

Sean A, B, Γ , Δ cuatro magnitudes proporcionales, es decir: como A es a B, así Γ a Δ , y sea A conmensurable con B.

Digo que Γ también será conmensurable con Δ .

Pues como A es conmensurable con B, entonces A guarda con B la razón que un número guarda con un número [X 5]. Y como A es a B, así Γ a Δ . Entonces Γ guarda también con Δ la

¹³ Existen serias objeciones para considerar genuino este teorema:

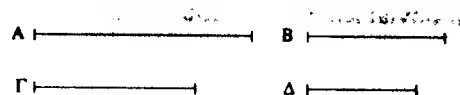
En primer lugar, depende de la siguiente proposición X 11 para concluir que el cuadrado de A es inconmensurable con el cuadrado de E; de modo que incurriría en la pretensión irregular de probar un teorema sobre la base de demostraciones posteriores.

Además la expresión *emáthomen gár* «pues lo hemos aprendido» no es propia de Euclides y revelaría la mano de un estudiante (aunque esta expresión se halla en la *Sectio Canonis* euclídea empleada con referencia a los *Elementos*).

Por último, el manuscrito P, en su primera mano, tiene el número 10 al principio de X 11, de donde parece desprenderse que inicialmente X 10 no tenía número.

Por todo ello, Heath considera espurios tanto el lema anterior como la proposición X 10. Heiberg, si bien no lo atetiza, declara en una nota a su traducción (edic. cit., III, pág. 35) que resulta sospechoso y que a duras penas se puede considerar de Euclides.

razón que un número guarda con un número; luego Γ es conmensurable con Δ [X 6].



Pero ahora sea A inconmensurable con B.

Digo que Γ también será inconmensurable con Δ .

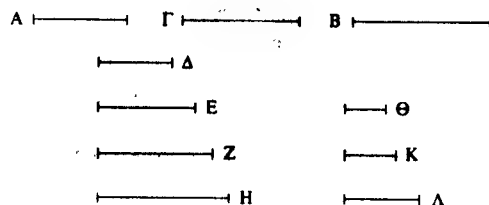
Pues como A es inconmensurable con B, entonces A no guarda con B la razón que un número guarda con un número [X 7]. Y A es a B como Γ es a Δ . Entonces Γ tampoco guarda con Δ la razón que un número guarda con un número; luego Γ es inconmensurable con Δ [X 8].

Por consiguiente, si cuatro magnitudes..., etc.

PROPOSICIÓN 12

Las magnitudes conmensurables con una misma magnitud son también conmensurables entre sí.

Sea, pues, conmensurable cada una de las magnitudes A, B con la magnitud Γ .



Digo que A es también conmensurable con B.

Pues como A es conmensurable con Γ , entonces A guarda con Γ la razón que un número guarda con un número [X 5].

Guarde la razón de Δ a E. Puesto que a su vez Γ es conmensurable con B, entonces Γ guarda con B la razón que un número guarda con un número [X 5]. Guarde la razón de Z a H. Y dadas cuantas razones se quiera, a saber, la de Δ a E y la de Z a H, tómense los números Θ , K, Λ sucesivamente en las razones dadas [VIII 4]; de modo que, como Δ es a E, así Θ a K, y como Z es a H, así K a Λ .

Así pues, dado que, como A es a Γ , así Δ a E, mientras que, como Δ es a E, así Θ a K, entonces como A es a Γ , así también Θ a K [V 11]. Y puesto que, como Γ es a B, así Z es a su vez a H, mientras que, como Z es a H, K es a Λ , entonces, como Γ es a B, así K a Λ [V 11]. Pero, como A es a Γ , así también Θ a K; entonces, por igualdad, como A es a B, así Θ a Λ [V 22]. Luego A guarda con B la razón que el número Θ guarda con el número Λ ; por tanto A es conmensurable con B [X 6].

Por consiguiente, las (magnitudes) conmensurables con una misma magnitud son conmensurables entre sí. Q. E. D

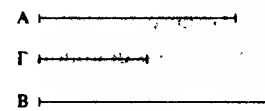
PROPOSICIÓN 13

Si hay dos magnitudes conmensurables y una de ellas es inconmensurable con otra magnitud cualquiera, también la restante será inconmensurable con ella.

Sean A, B dos magnitudes conmensurables y una de ellas, A, sea inconmensurable con otra magnitud cualquiera, Γ .

Digo que la restante, B, es también inconmensurable con Γ .

Pues si B es conmensurable con Γ , y A es también conmensurable con B, entonces A es conmensurable con Γ [X 12]. Pero es también inconmensurable; lo cual es imposible. Por tanto B



no es conmensurable con Γ ; luego es inconmensurable (con ella).

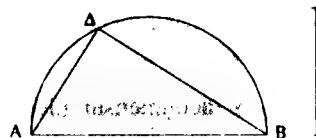
Por consiguiente, si dos magnitudes conmensurables..., etc.

LEMA

Dadas dos rectas desiguales hallar en cuánto el cuadrado de la mayor es mayor que el cuadrado de la menor.

Sean AB, Γ las dos rectas desiguales dadas, de las cuales sea AB la mayor.

Así pues hay que hallar en cuánto es mayor el cuadrado de AB que el de Γ .



Describese sobre AB el semicírculo $A\Delta B$ y adáptese a él la (recta) $A\Delta$ igual a Γ [IV 1] y trácese ΔB . Entonces está claro que el ángulo $A\Delta B$ es recto [III 31] y que el cuadrado de

AB es mayor que el cuadrado de $A\Delta$, es decir de Γ , en el cuadrado de ΔB [I 47].

De manera semejante, dadas dos rectas, se hallará la recta cuyo cuadrado es igual a los cuadrados de ellas, de la siguiente manera:

Sean $A\Delta, \Delta B$ las dos rectas dadas y sea lo requerido hallar la recta cuyo cuadrado es igual a los cuadrados de ellas. Pónganse pues de modo que sea recto el ángulo comprendido por $A\Delta, \Delta B$, y trácese AB ; está claro de nuevo que AB es la (recta) cuyo cuadrado es igual a los de $A\Delta, \Delta B$ [I 47]. Q. E. D. ¹⁴.

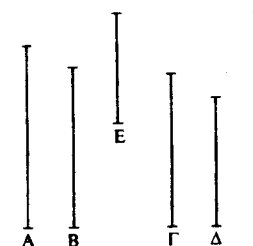
¹⁴ El lema proporciona el método de hallar una recta c igual a $\sqrt{a^2+b^2}$ donde a y b son rectas dadas de las que la mayor es a .

PROPOSICIÓN 14

Si cuatro rectas son proporcionales, y el cuadrado de la primera es mayor que el de la segunda en el cuadrado de una recta conmensurable con la primera, el cuadrado de la tercera será también mayor que el de la cuarta en el cuadrado de una (recta) conmensurable con la tercera. Y si el cuadrado de la primera es mayor que el de la segunda en el cuadrado de una recta inconmensurable con la primera, el cuadrado de la tercera será también mayor que el de la cuarta en el cuadrado de una recta inconmensurable con ella (la tercera).

Sean A, B, Γ, Δ cuatro rectas proporcionales (tales que) como A es a B , así Γ a Δ , y sea el cuadrado de A mayor que el de B en el cuadrado de E , y el cuadrado de Γ sea mayor que el de Δ en el cuadrado de Z .

Digo que si A es conmensurable con E , Γ será también conmensurable con Z , pero si A es inconmensurable con E , Γ será también inconmensurable con Z .



Pues, dado que, como A es a B , así Γ a Δ , entonces, como el cuadrado de A es al cuadrado de B , así también el cuadrado de Γ al de Δ [VI 22]. Pero los cuadrados de E, B son iguales al cuadrado de A , y los cuadrados de Δ, Z son iguales al cuadrado de Γ . Entonces, como los cuadrados de E, B son al cuadrado de B , así los cuadrados de Δ, Z al cuadrado de Δ ; luego, por separación, como el cuadrado de E es al cuadrado de B , así el cuadrado de Z al cuadrado de Δ [V 17]; por tanto, como E es a B , así Z a Δ [VI 22]; entonces, por inversión, como B es a E , así Δ a Z . Pero como A es a B , así también Γ a Δ ; luego, por igual-

dad, como A es a E, así Γ a Z [V 22]. Ahora bien, si A es conmensurable con E, Γ es también conmensurable con Z, pero si A es inconmensurable con E, Γ es también inconmensurable con Z [X 11].

Por consiguiente..., etc.¹⁵.

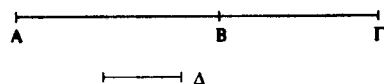
PROPOSICIÓN 15

Si se suman dos magnitudes conmensurables, la (magnitud) total también será conmensurable con cada una de ellas; y si la (magnitud) total es conmensurable con cada una de ellas, también las magnitudes iniciales serán conmensurables.

Súmense, pues, las dos magnitudes conmensurables AB, B Γ .

Digo que la (magnitud) total A Γ es también conmensurable con cada una de las (magnitudes) AB, B Γ .

Pues como AB, B Γ son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Médalas (una magnitud) y sea Δ . Así pues, dado



que Δ mide a AB, B Γ , medirá también a la magnitud total A Γ . Pero mide también a AB, B Γ . Entonces Δ mide a AB, B Γ , A Γ . Luego A Γ es conmensurable con cada una de las magnitudes AB, B Γ [X Def. 1].

Pero ahora sea A Γ conmensurable con AB.

Digo que AB, B Γ son también conmensurables.

¹⁵ En aras de la claridad sustituyo por «primera» o «tercera» la palabra *heauté* del griego cuya traducción literal se prestaría a equívocos.

Pues como A Γ , AB son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Médalas (una magnitud) y sea Δ . Así pues, dado que Δ mide a Γ A, AB, entonces medirá también a la magnitud restante B Γ . Pero también mide a AB; entonces Δ medirá a AB, B Γ . Luego AB, B Γ son conmensurables [X Def. 1].

Por consiguiente, si dos magnitudes..., etc.

PROPOSICIÓN 16

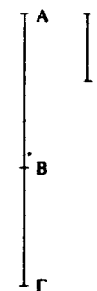
Si se suman dos magnitudes inconmensurables, la magnitud total también será inconmensurable con cada una de ellas; y si la magnitud total es inconmensurable con una de ellas, las magnitudes iniciales serán también inconmensurables.

Súmense, pues, las dos magnitudes inconmensurables AB, B Γ .

Digo que la (magnitud) total A Γ es inconmensurable con cada una de las (magnitudes) AB, B Γ .

Pues si Γ A, AB no son inconmensurables, alguna magnitud las medirá. Médalas (una magnitud), si es posible, y sea Δ . Así pues, como Δ mide a Γ A, AB, entonces, medirá también a la magnitud restante B Γ . Pero mide también a AB; entonces Δ mide a AB, B Γ . Luego AB, B Γ son conmensurables; pero se ha supuesto que son inconmensurables; lo cual es imposible. Por tanto, ninguna magnitud medirá a Γ A, AB; luego Γ A, AB son inconmensurables [X Def. 1]. De manera semejante demostraríamos que A Γ , B Γ son inconmensurables. Por tanto A Γ es inconmensurable con cada una de las magnitudes AB, B Γ .

Pero ahora sea A Γ inconmensurable con una de las (magnitudes) AB, B Γ . Séalo en primer lugar con AB.



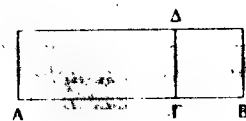
Digo que AB, BΓ son también inconmensurables. Pues, si son conmensurables, alguna magnitud las medirá. Médalas (una magnitud) y sea Δ. Así pues, como Δ mide a AB, BΓ, entonces, medirá también a la (magnitud) total AΓ. Pero mide también a AB; entonces Δ mide a ΓA, AB. Luego ΓA, AB son conmensurables; pero se ha supuesto que son inconmensurables; lo cual es imposible. Luego ninguna magnitud medirá a AB, BΓ; por tanto AB, BΓ son inconmensurables.

Por consiguiente, si dos magnitudes..., etc.

LEMA

Si se aplica a una recta un paralelogramo deficiente en la figura de un cuadrado, el (paralelogramo) aplicado es igual al (rectángulo) producido por los segmentos de recta que resultan de la aplicación.

Aplicátese, pues, a la recta AB, el paralelogramo AΔ deficiente en la figura de un cuadrado, ΔB.



Digo que AΔ es igual al rectángulo comprendido por AΓ, ΓB.

Y esto queda claro por sí mismo: pues como ΔB es un cuadrado, AΓ es igual a ΓB, y AΔ es el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓΔ, es decir, el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB.

Por consiguiente, si se aplica una recta... etc.¹⁶

¹⁶ Como anota HEATH (*edic. cit.*, III, pág. 41), si a es la recta dada y x el lado del cuadrado en el que el rectángulo aplicado es deficiente, el rectángulo es igual a $ax - x^2$, igual a su vez a $x(a - x)$. El rectángulo puede formularse como xy , donde $x + y = a$. Dada el área $x(a - x)$ ó xy (donde $x + y = a$), dos aplicaciones diferentes darán rectángulos iguales a esa área; siendo los lados del defecto x ó $a - x$ (x ó y) respectivamente; pero el segundo modo de expresión muestra que los rectángulos no difieren en la forma sino en la posición.

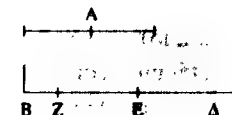
En lo que se refiere a la noción de áreas deficientes cf. nota 59 de *Elementos I-IV*, pág. 255

PROPOSICIÓN 17

Si hay dos rectas desiguales, y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, y si la divide en (partes) conmensurables en longitud, el cuadrado de la mayor será mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable con ella (la mayor). Y si el cuadrado de la mayor es mayor que el de la menor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (la mayor), y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en (partes) conmensurables en longitud.

Sean A, BΓ dos rectas desiguales, de las cuales BΓ sea la mayor, y aplíquese a BΓ un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de la menor, A, es decir, al (cuadrado) de la mitad de A, y deficiente en la figura de un cuadrado. Y sea el (rectángulo comprendido) por BΔ, ΔΓ [Lema]. Y sea BΔ conmensurable en longitud con ΔΓ.

Digo que el cuadrado de BΓ es mayor que el de A en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (BΓ).



Divídase, pues, BΓ en dos partes iguales por el (punto) E, y hágase EZ igual a ΔE. Entonces, la restante ΔΓ es igual a BZ. Y dado que la recta BΓ ha sido dividida en partes iguales por el (punto) E y en partes desiguales por el (punto) Δ, entonces el rectángulo comprendido por BΔ, ΔΓ junto con el cuadrado de EΔ es igual al cuadrado de EΓ [II 5]; y (lo mismo vale) para sus cuádruples; entonces el cuádruple del (rectángulo comprendido) por BΔ, ΔΓ junto con el cuádruple del cuadrado de ΔE es igual al cuádruple del cuadrado de EΓ.

Pero el cuadrado de A es igual al cuádruple del rectángulo comprendido por BA , $\Delta\Gamma$, mientras que el cuadrado de ΔZ es igual al cuádruple del cuadrado de ΔE : porque ΔZ es el doble de ΔE . Pero el cuadrado de $B\Gamma$ es igual al cuádruple del cuadrado de $E\Gamma$: porque $B\Gamma$ es a su vez el doble de ΓE . Luego los cuadrados de las rectas A , ΔZ son iguales al cuadrado de $B\Gamma$; de modo que el cuadrado de $B\Gamma$ es mayor que el cuadrado de A en el cuadrado de ΔZ ; luego el cuadrado de $B\Gamma$ es mayor que el de A en el cuadrado de ΔZ ¹⁷.

Hay que demostrar que $B\Gamma$ es además conmensurable con ΔZ . Pues como BA es conmensurable en longitud con $\Delta\Gamma$, entonces $B\Gamma$ es conmensurable en longitud con $\Gamma\Delta$ [X 15]. Pero $\Gamma\Delta$ es conmensurable en longitud con ΓA , BZ : porque $\Gamma\Delta$ es igual a BZ [X 6]. Luego $B\Gamma$ es conmensurable en longitud con BZ , $\Gamma\Delta$ [X 12]; de modo que $B\Gamma$ también es conmensurable en longitud con la restante $Z\Delta$ [X 15]; luego el cuadrado de $B\Gamma$ es mayor que el cuadrado de A en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella ($B\Gamma$).

Pues bien, sea mayor el cuadrado de $B\Gamma$ que el cuadrado de A en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella ($B\Gamma$) y aplíquese a $B\Gamma$ un paralelogramo igual a la cuarta parte del (cuadrado) de A y deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el rectángulo comprendido por BA , $\Delta\Gamma$.

Hay que demostrar que BA es conmensurable en longitud con $\Delta\Gamma$.

Pues, siguiendo la misma construcción, demostraríamos de manera semejante que el cuadrado de $B\Gamma$ es mayor que el de A en el cuadrado de $Z\Delta$. Pero el cuadrado de $B\Gamma$ es mayor que el

de A en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella ($B\Gamma$). Entonces $B\Gamma$ es conmensurable en longitud con $Z\Delta$; de modo que $B\Gamma$ también es conmensurable en longitud con el resto, a saber, la suma de BZ , $\Delta\Gamma$ [X 15]. Pero la suma de BZ , $\Delta\Gamma$ es conmensurable con $\Delta\Gamma$ [X 6]. De modo que $B\Gamma$ es también conmensurable en longitud con $\Delta\Gamma$ [X 15].

Por consiguiente, si hay dos rectas desiguales..., etc.

PROPOSICIÓN 18

Si hay dos rectas desiguales y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor deficiente en la figura de un cuadrado, y si la divide en (partes) inconmensurables, el cuadrado de la mayor será mayor que el cuadrado de la menor en el cuadrado de una recta inconmensurable con ella (la mayor). Y si el cuadrado de la mayor es mayor que el cuadrado de la menor en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (la mayor) y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en (partes) inconmensurables.

Sean A , $B\Gamma$ dos rectas desiguales, de las cuales sea $B\Gamma$ la mayor, y aplíquese a $B\Gamma$ un paralelogramo igual a la cuarta parte del (cuadrado) de la menor, A , y deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo) $BA\Gamma$ [Cf. lema anterior a X 17], y sea BA inconmensurable en longitud con $\Delta\Gamma$.

Digo que el cuadrado de $B\Gamma$ es mayor que el cuadrado de A en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella ($B\Gamma$).

Pues, siguiendo la misma construcción del (teorema) anterior, demostraríamos de manera semejante que el cuadrado de $B\Gamma$ es mayor que el de A en el (cuadrado) de $Z\Delta$.

¹⁷ *Hē BΓ ára tēs A meídson dýnatai tē ΔZ*. Se utiliza *dýnatai* aquí en el mismo sentido técnico que *dýnāmei* «en cuadrado» (cf. MUGLER, *Dictionnaire...*, págs. 148 ss.) o *hē dynaménē* «el lado del cuadrado equivalente a». Este verbo se utiliza en contextos matemáticos para significar la operación de elevar al cuadrado.

Hay que demostrar que $B\Gamma$ es inconmensurable en longitud con ΔZ . Pues como BA es inconmensurable en longitud con $\Delta\Gamma$, entonces $B\Gamma$ es también inconmensurable en longitud con $\Gamma\Delta$ [X 16]. Pero $\Delta\Gamma$ es conmensurable con la suma de BZ , $\Delta\Gamma$ [X 6]; entonces $B\Gamma$ es inconmensurable con la suma de BZ , ΔZ [X 13]. De modo que $B\Gamma$ es también inconmensurable en longitud con la restante ZA [X 16]. Y el cuadrado de $B\Gamma$ es mayor que el cuadrado de A en el (cuadrado) de ZA : luego el cuadrado de $B\Gamma$ es mayor que el cuadrado de A en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella ($B\Gamma$).

Sea a su vez el cuadrado de $B\Gamma$ mayor que el cuadrado de A en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella ($B\Gamma$) y aplíquese a $B\Gamma$ un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de A y deficiente en la figura de un cuadrado y sea el (rectángulo comprendido) por BA , $\Delta\Gamma$.

Hay que demostrar que BA es inconmensurable en longitud con $\Delta\Gamma$.

Pues, siguiendo la misma construcción, demostraríamos de manera semejante que el cuadrado de $B\Gamma$ es mayor que el cuadrado de A en el (cuadrado) de ZA . Pero el cuadrado de $B\Gamma$ es mayor que el cuadrado de A en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella ($B\Gamma$). Luego $B\Gamma$ es inconmensurable en longitud con ZA ; de modo que $B\Gamma$ es inconmensurable con el resto, es decir, con la suma de BZ , $\Delta\Gamma$ [X 16]. Pero la suma de BZ , $\Delta\Gamma$ es conmensurable en longitud con $\Delta\Gamma$ [X 6]; luego $B\Gamma$ es inconmensurable en longitud con $\Delta\Gamma$ [X 13]; de modo que, por separación, BA es inconmensurable en longitud con $\Delta\Gamma$ [X 16]

Por consiguiente, si hay dos rectas..., etc.

LEMA

Puesto que queda demostrado que las (rectas) conmensurables en longitud lo son siempre también en cuadrado, mientras

que las que lo son en cuadrado no lo son siempre también en longitud, sino que pueden ser, en efecto, conmensurables o inconmensurables en longitud, queda claro que, si una recta es conmensurable en longitud con una recta expresable¹⁸ determinada, se llama expresable y conmensurable con ella no sólo en longitud sino también en cuadrado, porque las (rectas) conmensurables en longitud lo son siempre también en cuadrado. Ahora bien, si una recta es conmensurable en cuadrado con una (recta) expresable determinada, entonces, si lo es también en longitud, se dice que es expresable y conmensurable con ella en longitud y en cuadrado; pero si una recta, siendo a su vez conmensurable en cuadrado con otra recta expresable determinada, es inconmensurable en longitud con ella, en este caso también se llama expresable pero conmensurable sólo en cuadrado¹⁹.

PROPOSICIÓN 19

El rectángulo comprendido por rectas expresables conmensurables en longitud, según alguna de las formas antedichas es expresable²⁰.

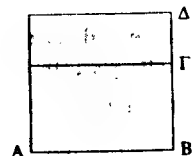
¹⁸ A partir de aquí traduzco *rhēiós* como «expresable» para abreviar la expresión «racionalmente expresable» que complicaría en exceso la lectura del texto en castellano.

¹⁹ HEATH (*op. cit.*, III, pág. 47) suprime el lema por considerarlo superfluo y prolijo en exceso.

²⁰ HEATH (*op. cit.*, III, pág. 48) encuentra dificultades para admitir estas palabras pues sólo hay dos formas de conmensurabilidad: conmensurabilidad en longitud, y por tanto en cuadrado, o sólo en cuadrado, y cada una excluye la otra. Por otra parte *proeirēménōn* «antedichas» parece referirse al lema anterior que considera sospechoso. Por todo ello cree que la mejor solución sería suprimir tanto el lema como las palabras citadas del enunciado de X 19.

Pues sea comprendido el rectángulo AG por las rectas expresables y conmensurables en longitud AB , $B\Gamma$.

Digo que AG es expresable.



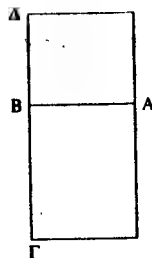
Pues constrúyase sobre AB el cuadrado de $A\Delta$. Entonces $A\Delta$ es expresable [X Def. 4]. Y como AB es conmensurable en longitud con $B\Gamma$, mientras que AB es igual a $B\Delta$, entonces $B\Delta$ es conmensurable en longitud con $B\Gamma$. Y como $B\Delta$ es a $B\Gamma$, así $A\Delta$ a $A\Gamma$ [VI 1]. Luego $A\Delta$ es conmensurable con $A\Gamma$ [X 11]. Pero $A\Delta$ es expresable; luego $A\Gamma$ es también expresable [X Def. 4].

Por consiguiente, el rectángulo comprendido..., etc.

PROPOSICIÓN 20

Si se aplica un (área) expresable a una (recta) expresable, produce como anchura una (recta) expresable y conmensurable en longitud con aquella a la que se ha aplicado.

Aplíquese, pues, el (área) expresable AG a la recta AB expresable una vez más según alguna de las formas antedichas, de modo que produzca como anchura $B\Gamma$.



Digo que $B\Gamma$ es expresable y conmensurable en longitud con BA .

Pues constrúyase sobre AB el cuadrado de $A\Delta$; entonces $A\Delta$ es expresable [X Def. 4]. Pero también lo es $A\Gamma$; luego $A\Delta$ es conmensurable con $A\Gamma$. Ahora bien, como $A\Delta$ es a $A\Gamma$, así ΔB a $B\Gamma$ [VI 11]. Por tanto ΔB es conmensurable también con $B\Gamma$ [X 11]; pero ΔB es igual a BA . Luego AB es conmensurable con $B\Gamma$. Ahora bien, AB es expresable; por tanto, $B\Gamma$ es expresable y conmensurable en longitud con AB .

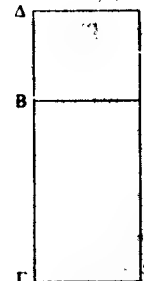
Por consiguiente, si se aplica un (área) expresable a una recta expresable..., etc.

PROPOSICIÓN 21

El rectángulo comprendido por rectas expresables y conmensurables sólo en cuadrado no es racionalmente expresable²¹ y el lado del cuadrado igual a él tampoco es racionalmente expresable, llámese (este último) medial.

Sea, pues, comprendido el rectángulo AG por las rectas expresables y conmensurables sólo en cuadrado AB , $B\Gamma$.

Digo que AG no es expresable, y el lado del cuadrado igual a él tampoco es expresable, y llámese medial.



Pues constrúyase sobre AB el cuadrado $A\Delta$; entonces $A\Delta$ es expresable [X Def. 4]. Y como AB es inconmensurable en longitud con $B\Gamma$, porque se ha supuesto que es conmensurable sólo en cuadrado, mientras que AB es igual a $B\Delta$, entonces ΔB es inconmensurable en longitud con $B\Gamma$. Ahora bien, como ΔB es a $B\Gamma$, así $A\Delta$ es a $A\Gamma$ [VI 1]; luego $A\Delta$ es inconmensurable con $A\Gamma$ [X 11]. Pero $A\Delta$ es expresable; luego $A\Gamma$ no es expresable; de modo que el lado del cuadrado igual a $A\Gamma$ tampoco es expresable, llámese medial. Q. E. D.²²

²¹ Cf. notas 2 y 3.

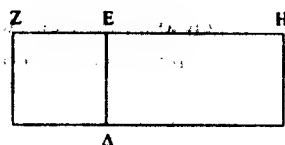
²² La recta medial recibe tal nombre por tratarse de la media proporcional entre dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado. Se demuestra aquí que el rectángulo comprendido por ellas no es racionalmente expresable. En el porisma a X 23 esta área se denomina «medial».

LEMA

Si hay dos rectas, como la primera es a la segunda, así el cuadrado de la primera al rectángulo comprendido por las dos rectas.

Sean ZE, EH dos rectas.

Digo que como ZE es a EH, así el (cuadrado) de ZE al (rectángulo comprendido) por ZE, EH.



Constrúyase, pues, sobre ZE, el cuadrado ΔZ, y complétese el (paralelogramo) HΔ. Así pues, dado que, como ZE es a EH, así

ZΔ a ΔH [VI 1], y ZΔ es el (cuadrado) de ZE, mientras que ΔH es el (rectángulo comprendido) por ΔE, EH, es decir por ZE, EH, entonces como ZE es a EH, así el (cuadrado) de ZE al (rectángulo comprendido) por ZE, EH. De manera semejante, como el (rectángulo comprendido) por HE, HZ es al (cuadrado) de EZ, es decir, como HΔ es a ZΔ, así es HE a EZ. Q. E. D.²³

PROPOSICIÓN 22

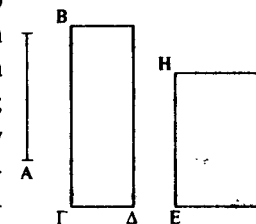
El (cuadrado) de una (recta) medial, si se aplica a una recta expresable, produce una anchura expresable e inconmensurable en longitud con aquella a la que se aplica.

Sea A la (recta) medial y ΓB la expresable, y aplíquese a BΓ el área rectangular BΔ igual al cuadrado de A, produciendo la anchura ΓΔ.

Digo que ΓΔ es expresable e inconmensurable en longitud con ΓB.

²³ Si a, b son dos rectas, $a : b :: a^2 : ab$.

Pues como A es una medial, su cuadrado es igual a un área comprendida por rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 21]. Sea su cuadrado igual a HZ. Pero su cuadrado también es igual a BΔ; entonces BΔ es igual a HZ. Pero también son equiangulares; y en los paralelogramos iguales y equiangulares, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados [VI 14].



Luego, proporcionalmente, como BΓ es a EH, así EZ a ΓΔ. Entonces, como el (cuadrado) de BΓ es al (cuadrado) de EH, así el (cuadrado) de EZ es al (cuadrado) de ΓΔ [VI 22]. Ahora bien, el (cuadrado) de ΓB es conmensurable con el de EH; porque cada uno de ellos es expresable; luego el (cuadrado) de EZ es también conmensurable con el (cuadrado) de ΓΔ [X 11]. Pero el (cuadrado) de EZ es expresable; luego el cuadrado de ΓΔ es también expresable [X Def. 4]; por tanto, ΓΔ es expresable. Ahora bien, como EZ es inconmensurable en longitud con EH, porque son conmensurables sólo en cuadrado; y como EZ es a EH, así el (cuadrado) de EZ al (rectángulo comprendido) por ZE, EH [lema], entonces el (cuadrado) de EZ es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ZE, EH. Pero el (cuadrado) de ΓΔ es conmensurable con el cuadrado de EZ; porque son expresables en cuadrado; y el (rectángulo comprendido) por ΔΓ, ΓB es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por ZE, EH, porque son iguales al (cuadrado) de A; luego el (cuadrado) de ΓΔ es también inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ΔΓ, ΓB [X 13]. Pero, como el (cuadrado) de ΓΔ es al (rectángulo comprendido) por ΔΓ, ΓB, así ΔΓ es a ΓB [lema]. Por tanto, ΔΓ es inconmensurable en longitud con ΓB [X 11]. Por consiguiente, ΓΔ es expresable e inconmensurable en longitud con ΓB. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 23

La recta conmensurable con una (recta) medial es medial.

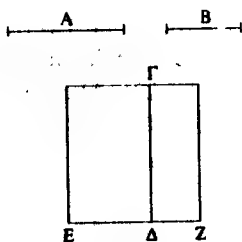
Sea A una recta medial, y sea B conmensurable con A.

Digo que B es también medial.

Póngase, pues, la recta expresable $\Gamma\Delta$, y aplíquese a $\Gamma\Delta$ un área rectangular ΓE igual al cuadrado de A que produzca la anchura $E\Delta$; entonces $E\Delta$ es expresable e incommensurable en longitud con $\Gamma\Delta$ [X 22]. Pero aplíquese a $\Gamma\Delta$ un área rectangular, ΓZ , igual al (cuadrado) de B que produzca la anchura ΔZ . Entonces, dado que A es conmensurable con B, el (cuadrado) de A es también conmensurable con el (cuadrado) de B. Pero $E\Gamma$ es igual al (cuadrado) de A, mientras que ΓZ es igual al (cuadrado) de B; por tanto, $E\Gamma$ es conmensurable con ΓZ . Ahora bien, como $E\Gamma$ es a ΓZ , así $E\Delta$ a ΔZ [VI 1]; entonces $E\Delta$ es conmensurable en longitud con ΔZ [X 11]; pero $E\Delta$ es expresable e incommensurable en longitud con $\Delta\Gamma$; entonces $\Delta\Gamma$ es expresable [X Def. 3] e incommensurable en longitud con ΔZ [X 13]; luego $\Gamma\Delta$, ΔZ son expresables y conmensurables sólo en cuadrado. Pero la recta cuyo cuadrado es igual al rectángulo comprendido por rectas expresables y conmensurables sólo en cuadrado es medial [X 21]. Luego la recta cuyo cuadrado es igual al rectángulo comprendido por $\Gamma\Delta$, ΔZ es medial; y el cuadrado de B es igual al rectángulo comprendido por $\Gamma\Delta$, ΔZ . Por consiguiente, B es medial.

Porisma:

A partir de esto queda claro que un (área) conmensurable con un área medial es medial.



De acuerdo con lo que se ha dicho acerca de las (rectas) expresables [Lema siguiente a X 18] se sigue, en lo que se refiere a las mediales, que la recta conmensurable en longitud con una medial se llama medial y es conmensurable con ella no sólo en longitud sino también en cuadrado, porque, en general, las (rectas) conmensurables en longitud lo son siempre también en cuadrado. Pero si una recta es conmensurable en cuadrado con una medial, y si lo es también en longitud, en este caso se llaman también mediales y conmensurables en longitud y en cuadrado, pero si sólo lo son en cuadrado, se llaman mediales conmensurables sólo en cuadrado ²⁴.

PROPOSICIÓN 24

El rectángulo comprendido por rectas mediales conmensurables en longitud según alguna de las formas antedichas ²⁵, es medial.

Sea pues comprendido el rectángulo $A\Gamma$ por las rectas mediales conmensurables en longitud AB , $B\Gamma$.

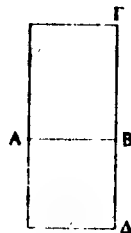
Digo que el (rectángulo) $A\Gamma$ es medial.

Pues constrúyase sobre AB el cuadrado $A\Delta$; entonces $A\Delta$ es medial. Y puesto que AB es conmensurable en longitud

²⁴ En el porisma tenemos la primera mención de un área medial. Se trata de un área igual al cuadrado de una recta medial. Euclides no da una definición explícita.

Por otra parte HEATH atetiza el último párrafo del porisma (cf. *op. cit.*, III, pág. 54 y nota 25).

²⁵ El enunciado presenta la misma dificultad que X 19. Cf. nota 20. Heath decide suprimir las palabras «según alguna de las formas antedichas» así como la parte del porisma anterior a la que debían referirse estas palabras.



con BG, mientras que AB es igual a BA, entonces AB también es conmensurable en longitud con BG; de modo que ΔA es conmensurable con AG [VI 1, X 11]. Pero ΔA es medial. Por consiguiente, AG también es medial [X 23 Por.]. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 25

El rectángulo comprendido por rectas mediales commensurables sólo en cuadrado o es expresable o es medial.

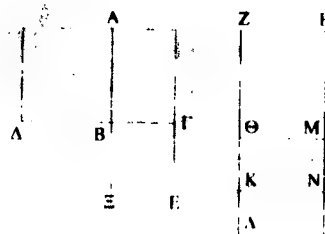
Sea, pues, comprendido el rectángulo AF por las rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado, AB , BF .

Digo que AG o es expresable o es medial.

Pues constrúyanse sobre AB , BF los cuadrados $A\Delta$, BE ; entonces cada uno de los (cuadrados) $A\Delta$, BE son mediales.

Póngase la recta expresable
ZH, y aplíquese a la (recta) ZH
el paralelogramo rectangular

HΘ igual a AΔ de modo que produzca la anchura ZΘ; aplíquese, por otra parte a ΘM el paralelogramo rectangular MK igual a AΓ de modo que produzca la anchura ΘK, y además aplíquese a KN, de manera semejante, el rectángulo NΛ igual a BE, de modo que produzca la anchura KΛ. Entonces ZΘ, ΘK, KΛ están en línea recta. Así pues, dado que cada uno de los (cuadrados) AΔ, BE es medial, y AΔ es igual a HΘ, y BE a NΛ, entonces, cada uno de los (rectángulos) HΘ, NΛ también es medial. Y se han aplicado a la recta expresable ZH; luego cada una de las (rec-



tas) $Z\Theta$, $K\Lambda$ es expresable e incommensurable en longitud con ZH [X 22]. Y puesto que $A\Delta$ es commensurable con BE , entonces $H\Theta$ es commensurable con $N\Lambda$. Y como $H\Theta$ es a $N\Lambda$, así la (recta) $Z\Theta$ a la (recta) $K\Lambda$ [VI 1]; entonces la (recta) $Z\Theta$ es commensurable en longitud con la (recta) $K\Lambda$ [X 11]. Luego $Z\Theta$, $K\Lambda$ son expresables y commensurables en longitud; por tanto, el (rectángulo comprendido) por $Z\Theta$, $K\Lambda$ es expresable [X 19]. Y dado que ΔB es igual a BA , y ΞB a $B\Gamma$, entonces, como ΔB es a $B\Gamma$, así AB a BE y, por tanto, como ΔB es a $B\Gamma$, así ΔA a $A\Gamma$ [VI 1], y como AB es a $B\Xi$, así $A\Gamma$ a $\Gamma\Xi$ [VI 1]; entonces, como ΔA es a $A\Gamma$, así $A\Gamma$ a $\Gamma\Xi$. Pero $A\Delta$ es igual a $H\Theta$, $A\Gamma$ a MK , y $\Gamma\Xi$ a $N\Lambda$; entonces, como $H\Theta$ es a MK , así MK a $N\Lambda$; luego, como $Z\Theta$ es a ΘK , así también ΘK a $K\Lambda$ [VI 1, V 11]; por tanto, el (rectángulo comprendido) por $Z\Theta$, $K\Lambda$ es igual al (cuadrado) de ΘK [VI 17]. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por $Z\Theta$, $K\Lambda$ es expresable; entonces el (cuadrado) de ΘK es también expresable; luego ΘK es expresable. Y si es commensurable en longitud con ZH , entonces ΘN es expresable; pero si es incommensurable en longitud con ZH , $K\Theta$, ΘM son expresables y commensurables sólo en cuadrado, y entonces ΘN es medial [X 21]; por tanto ΘN o es expresable o es medial. Pero ΘN es igual a AT ; luego AT o es expresable o es medial.

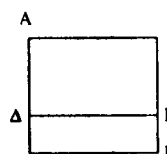
Por consiguiente, si el (rectángulo) comprendido por (rectas) conmensurables sólo en cuadrado.... etc.

PROPOSICIÓN 26

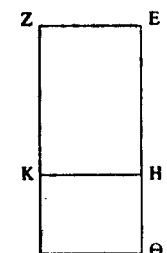
Un (área) medial no excede a outra medial en un (área) expresable.

Pues, si es posible, exceda el (área) AB al (área) medial AF en el (área) expresable ΔB , y póngase la recta expresable EZ , y

aplíquese a EZ el paralelogramo rectángulo ZΘ igual a AB de modo que produzca la anchura EΘ, y quítese el (rectángulo)



ZH igual a AΓ; entonces el resto BΔ es igual al resto KΘ. Pero ΔB es expresable; por tanto KΘ también es expresable. Así pues, dado que



cada uno de los (rectángulos) AB, AΓ es medial, y AB es igual a ZΘ, mientras que AΓ es igual a ZH, entonces cada uno de los (rectángulos) ZΘ, ZH es también medial. Y se han aplicado a la (recta) expresable EZ; entonces cada una de las (rectas) ΘE, EH es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22].

Ahora bien, puesto que ΔB es expresable y es igual a KΘ; entonces KΘ, es también expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable EZ; luego HΘ es también expresable y con-

mensurable en longitud con EZ [X 20]. Pero EH es también expresable e inconmensurable en longitud con EZ; entonces EH es inconmensurable en longitud con HΘ [X 13]. Ahora bien, como EH es a HΘ, así el (cuadrado) de EH es al (rectángulo comprendido) por EH, HΘ; entonces el (cuadrado) de EH es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por EH, HΘ [X 11]. Pero los cuadrados de EH, HΘ son conmensurables con el (cuadrado) de EH, porque ambos son expresables; pero dos veces el (rectángulo comprendido) por EH, HΘ es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por EH, HΘ, porque es el doble que él [X 6]; por tanto, los cuadrados de EH, HΘ son inconmensurables con dos veces el (rectángulo) comprendido por EH, HΘ [X 13]; luego, tanto la suma de los (cuadrados) de EH, HΘ como dos veces el (rectángulo comprendido) por EH, HΘ, que es precisamente el cuadrado de EΘ [II 4], es inconmensurable con los (cuadrados) de EH, HΘ [X 16]. Pero los (cuadrados) de EH, HΘ son expresables; luego el

(cuadrado) de EΘ no es expresable [X Def. 4]. Por tanto, EΘ no es expresable. Pero también es expresable; lo cual es imposible.

Por consiguiente, un (área) medial no excede a otra (área) medial en un (área) expresable. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 27

Hallar rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) expresable.

Pónganse dos rectas, A, B, expresables conmensurables sólo en cuadrado, y tómese la media proporcional, Γ, de A, B, y, como A es a B, sea así Γ a Δ [VI 21].

Y puesto que A, B son rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, entonces el (rectángulo comprendido) por A, B, es decir, el cuadrado de Γ [VI 17] es medial [X 21]. Entonces Γ es medial. Y puesto que, como A es a B, Γ es a Δ, y A, B son conmensurables sólo en cuadrado, entonces Γ, Δ son también conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Ahora bien, Γ es medial, luego también Δ es medial. Por tanto, Γ, Δ son mediales y conmensurables sólo en cuadrado.



Digo que también comprenden un rectángulo expresable.

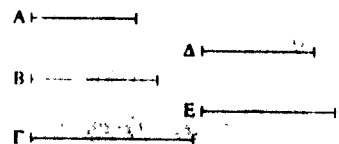
Pues, dado que, como A es a B, así Γ a Δ, entonces, por alternancia, como A es a Γ, B es a Δ [V 16]. Pero como A es a Γ, B es a Δ [V 16]. Pero como A es a Γ, Γ es a B; entonces, como Γ es a B, así B a Δ; luego el (rectángulo comprendido) por Γ, Δ es igual al cuadrado de B. Pero el cuadrado de B es expresable; por tanto el (rectángulo comprendido) por Γ, Δ es también expresable.

Por consiguiente, se han hallado rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) expresable. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 28

Hallar (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) medial.

Pónganse las (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado A, B, Γ y tómese la media proporcional Δ de A, B [VI 13], y como B es a Γ , sea así Δ a E [VI 12].



Puesto que A, B son rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, entonces el (rectángulo comprendido) por A, B, es decir el (cuadrado) de Δ [VI 17] es medial, luego Δ es medial [X 21]. Y puesto que B, Γ son conmensurables sólo en cuadrado, y como B es a Γ , Δ es a E, entonces Δ , E son también conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Pero Δ es medial; entonces E es también medial [X 23]. Luego Δ , E son mediales y conmensurables sólo en cuadrado.

Digo además que también comprenden un rectángulo medial.

Pues, dado que, como B es a Γ , así Δ a E, entonces, por alternancia, como B es a Δ , así Γ a E. Y como B es a Δ , así Δ a A; entonces, como Δ es a A, así también Γ a E; luego el (rectángulo comprendido) por A, Γ es igual al (rectángulo comprendido) por Δ , E [VI 16]. Pero el (rectángulo comprendido) por A, Γ es medial [X 21]. Por tanto, el (rectángulo comprendido) por Δ , E es también medial.

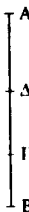
Por consiguiente, se han hallado rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un rectángulo medial. Q. E. D.

LEMA 1

Hallar dos números cuadrados tales que su suma sea también un cuadrado.

Pónganse dos números AB, B Γ y sean pares o impares. Y puesto que, tanto si de un número par se quita un número par, como si de un número impar se quita un número impar, el resto es par [IX 24-26]; entonces el resto A Γ es par. Divídase A Γ en dos partes iguales por Δ . Y sean AB, B Γ o números planos semejantes o números cuadrados, que son también ellos mismos números planos semejantes; entonces, el producto de AB, B Γ junto con el (cuadrado) de $\Gamma\Delta$ es igual al cuadrado de B Δ . Y el producto de AB, B Γ es también un cuadrado, puesto que precisamente hemos demostrado que, si dos números planos semejantes, al multiplicarse entre sí, hacen algún (número) el producto es un número cuadrado [IX 1]; entonces, se han hallado dos números cuadrados, el producto de AB, B Γ y el cuadrado de $\Gamma\Delta$ que, sumados, hacen el cuadrado de B Δ .

Y queda claro que se han hallado a su vez dos números cuadrados, el (cuadrado) de B Δ y el (cuadrado) de $\Gamma\Delta$, tales que su diferencia, el producto de AB, B Γ es un número cuadrado, siempre que AB, B Γ sean números planos semejantes. Pero en el caso de que no sean números planos semejantes, se han hallado dos cuadrados, el (cuadrado) de B Δ y el (cuadrado) de $\Delta\Gamma$, cuya diferencia, el producto de AB, B Γ no es un cuadrado. Q. E. D.



LEMA 2

Hallar dos números cuadrados tales que su suma no sea un cuadrado.

Sea, pues, el producto de AB , $B\Gamma$, según dijimos, un cuadrado, y sea ΓA un número par, y divídase en dos partes iguales por Δ . Queda claro que el producto de AB , $B\Gamma$ junto con el cuadrado de ΓA es igual al cuadrado de BA [lema 1].

Quítese la unidad ΔE ; entonces el producto de AB , $B\Gamma$ junto con el cuadrado de ΓE es menor que el cuadrado de BA .

Pues bien, digo que el cuadrado producto de AB , $B\Gamma$ junto con el (cuadrado) de ΓE no será un número cuadrado.

Pues si es cuadrado, o es igual al (cuadrado) de BE o menor que el (cuadrado) de BE , pero no es mayor, para que no se divida la unidad.

En primer lugar, si es posible, sea el (producto) de AB , $B\Gamma$ junto con el (cuadrado) de ΓE igual al cuadrado de BE , y sea HA el doble de la unidad ΔE . Así pues como el total $A\Gamma$ es el doble del total ΓA y en ellos AH es el doble de ΔE , entonces el resto $H\Gamma$ es el doble del resto $E\Gamma$; luego $H\Gamma$ se ha dividido en dos partes iguales por E ; por tanto, el (producto) de HB , $B\Gamma$ junto con el (cuadrado) de ΓE es igual al (cuadrado) de BE [II 6]. Pero se ha supuesto que el (producto) de AB , $B\Gamma$ junto con el (cuadrado) de ΓE es igual al (cuadrado) de BE ; entonces el (producto) de HB , $B\Gamma$ junto con el (cuadrado) de ΓE es igual al (producto) de AB , $B\Gamma$ junto con el (cuadrado) de ΓE . Ahora bien, si se quita de ambos el (cuadrado) de ΓE , se sigue que AB es igual a HB ; lo cual es absurdo. Luego el (producto) de AB , $B\Gamma$ junto con el (cuadrado) de ΓE no es igual al (cuadrado) de BE .

Digo además que tampoco es menor que el (cuadrado) de BE . Pues, si es posible, sea igual al (cuadrado) de BZ , y sea ΘA el doble de ΔZ . Pues bien, se seguirá de nuevo que $\Theta\Gamma$ es el do-

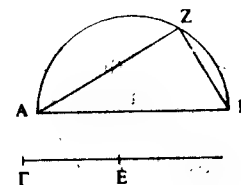
ble de ΓZ ; de modo que $\Gamma\Theta$ ha sido dividida TAMBIÉN EN DOS partes iguales por Z y que, por eso, el (producto) de $\Gamma\Theta$, $B\Gamma$ junto con el (cuadrado) de $Z\Gamma$ es igual al (cuadrado) de BZ [II 6]. Pero se ha supuesto que el (producto) de AB , $B\Gamma$ junto con el (cuadrado) de ΓE es igual al (cuadrado) de BZ . De modo que también el (producto) de ΘB , $B\Gamma$ junto con el (cuadrado) de ΓZ será igual al (producto) de AB , $B\Gamma$ junto con el (cuadrado) de ΓE ; lo cual es absurdo. Luego el (producto) de AB , $B\Gamma$ junto con el (cuadrado) de ΓE no es menor que el (cuadrado) de BE . Pero se ha demostrado que tampoco es igual al (cuadrado) de BE . Por consiguiente el (producto) de AB , $B\Gamma$ junto con el (cuadrado) de ΓE no es un cuadrado. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 29

Hallar dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable en longitud con ella (la mayor).

Póngase, pues, una recta expresable AB y los dos números cuadrados ΓA , ΔE , de modo que su diferencia ΓE no sea un cuadrado [lema 1], y describáse sobre AB el semicírculo AZB , y hágase de forma que como $\Delta\Gamma$ es a ΓE , así el cuadrado de BA al cuadrado de AZ [X 6 Por.], y trácese ZB .

Puesto que, como el (cuadrado) de BA es al (cuadrado) de AZ , así $\Delta\Gamma$ a ΓE , entonces el (cuadrado) de BA guarda con el (cuadrado) de AZ la razón que el número $\Delta\Gamma$ guarda con el número ΓE ; luego el (cuadrado) de BA es conmensurable (cuadrado) de AZ [X 6]. Pero el (cuadrado) de AB e-



[X Def. 4]; luego el (cuadrado) de AZ es también expresable [*id.*]; por tanto AZ es también expresable. Y puesto que $\Delta\Gamma$ no guarda con ΓE la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de BA tampoco guarda con el cuadrado de AZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego AB es inconmensurable en longitud con AZ [X 9]. Por tanto BA, AZ son expresables y conmensurables sólo en cuadrado. Ahora bien, dado que, como $\Delta\Gamma$ es a ΓE , así el (cuadrado) de BA al (cuadrado) de AZ, entonces, por conversión, como $\Gamma\Delta$ es a ΔE , así el (cuadrado) de AB es al (cuadrado) de BZ [V 19 Por.; III 31; I 47]. Pero $\Gamma\Delta$ guarda con ΔE la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces, el cuadrado de AB guarda con el cuadrado de BZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego AB es conmensurable en longitud con BZ [X 9]. Y el (cuadrado) de AB es igual a los (cuadrados) de AZ, ZB. Luego el cuadrado de AB es mayor que el de AZ en el (cuadrado) de la (recta) BZ conmensurable con ella (AB).

Por consiguiente, se han hallado dos rectas expresables BA, AZ conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de la mayor AB es mayor que el de la menor AZ en el cuadrado de la (recta) BZ conmensurable en longitud con ella (AB). Q. E. D.

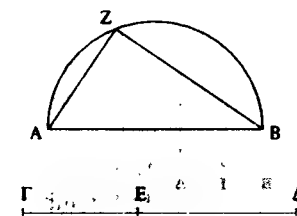
PROPOSICIÓN 30

Hallar dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (la mayor).

Póngase, pues, la recta expresable AB y los dos números cuadrados ΓE , $E\Delta$ tales que su suma, $\Gamma\Delta$ no sea un número cua-

drado [lema 2]. Y describáse sobre AB el semicírculo AZB, y hágase de forma que como $\Delta\Gamma$ es a ΓE , así el cuadrado de BA al cuadrado de AZ [X 6 Por.], y trácese ZB. De manera semejante a la (proposición) anterior demostraríamos que BA, AZ son expresables y conmensurables sólo en cuadrado. Ahora bien, dado que, como $\Delta\Gamma$ es a ΓE , así el (cuadrado) de BA al (cuadrado) de AZ, entonces, por conversión, como $\Gamma\Delta$ es a ΔE , así el (cuadrado) de AB al (cuadrado) de BZ [V 19 por.; III 31, I 47]. Pero $\Gamma\Delta$ no guarda con ΔE la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Entonces el (cuadrado) de AB tampoco guarda con el (cuadrado) de BZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego AB es inconmensurable en longitud con BZ [X 9]. Y el cuadrado de AB es mayor que el de AZ en el (cuadrado) de la (recta) ZB inconmensurable con ella (AB).

Por consiguiente, AB, AZ son expresables y conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de AZ en el cuadrado de la recta ZB, inconmensurable en longitud con ella (AB). Q. E. D.



PROPOSICIÓN 31

Hallar dos (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) expresable, de modo que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una (recta) conmensurable en longitud con ella (la mayor).

Pónganse las dos rectas expresables A, B conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de A que es la mayor sea mayor que el cuadrado de la menor, B, en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (A) [X 29]. Y sea el (cuadrado) de Γ igual al (rectángulo comprendido) por A, B. Pero el (rectángulo comprendido) por A, B es medial [X 21]; entonces el (cuadrado) de Γ también es medial, luego Γ es también medial [X 21]. Sea el rectángulo comprendido por $\Gamma\Delta$ igual al (cuadrado) de B; pero el cuadrado de B es expresable; luego el (rectángulo comprendido) por $\Gamma\Delta$ es también expresable. Ahora bien, dado que como A es a B, así el (rectángulo comprendido) por A, B es al (cuadrado) de B, mientras que el (cuadrado) de Γ es igual al (rectángulo comprendido) por A, B, y el (rectángulo comprendido) por Γ, Δ es igual al (cuadrado) de B, entonces, como A es a B, así el (cuadrado) de Γ al (rectángulo comprendido) por Γ, Δ . Pero, como el (cuadrado) de Γ es al (rectángulo comprendido) por Γ, Δ , así Γ es a Δ ; entonces, como A es a B, así Γ a Δ . Pero A es conmensurable con B sólo en cuadrado; luego Γ es también conmensurable con Δ sólo en cuadrado [X 11]. Y es medial; por tanto Δ también es medial [X 23]. Ahora bien, dado que, como A es a B, Γ es a Δ , y el (cuadrado) de A es mayor que el de B en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (A), entonces el cuadrado de Γ es también mayor que el de Δ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (Γ) [X 14].

Por consiguiente, se han hallado dos rectas mediales Γ, Δ conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) expresable, y el cuadrado de Γ es mayor que el de Δ en el cuadrado de una (recta) conmensurable en longitud con ella (Γ).

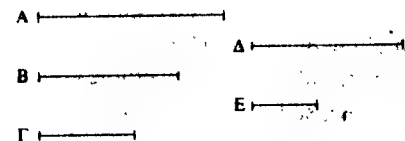
De manera semejante se demostraría que (el cuadrado de Γ es mayor que el cuadrado de Δ) en el (cuadrado) de una (recta)

inconmensurable en longitud con ella (Γ), siempre que el cuadrado de A sea mayor que el de B en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (A) [X 30]²⁶.

PROPOSICIÓN 32

Hallar dos (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un rectángulo medial, de modo que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (la mayor).

Pónganse tres rectas expresables A, B, Γ conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de A sea mayor



que el de Γ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (A) [X 29]; y sea el (cuadrado) de Δ igual al (rectángulo comprendido) por A, B. Entonces el (cuadrado) de Δ es medial; luego Δ es medial [X 21]. Pero sea el (rectángulo comprendido) por Δ, E igual al (rectángulo comprendido) por B, Γ . Y dado que, como el (rectángulo comprendido) por A, B es al (rectángulo comprendido) por B, Γ , así A es a Γ ; mientras que el (cuadrado) de Δ es igual al (rectángulo comprendido) por A, B y el (rectángulo comprendido) por Δ, E es igual al (rectángulo com-

²⁶ Al final de la proposición suplo entre paréntesis las palabras (el cuadrado de Γ es mayor que el cuadrado de Δ) sin las que el texto resultaría difícil de entender. Sigo la versión latina de Heiberg.

prendido) por B, Γ ; entonces, como A es a Γ , así el cuadrado de Δ es al (rectángulo comprendido) por Δ , E. Pero como el (cuadrado) de Δ es al (rectángulo comprendido) por Δ , E, así Δ a E; luego como A es a Γ , así Δ a E. Pero A es conmensurable con Δ sólo en cuadrado. Entonces Δ es conmensurable con E sólo en cuadrado [X 11]. Pero Δ es medial. Luego E es también medial [X 23]. Ahora bien, dado que, como A es a Γ , Δ es a E, mientras que el cuadrado de A es mayor que el de Γ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (A), entonces el cuadrado de Δ será también mayor que el de E en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (Δ) [X 14].

Digo además que el (rectángulo comprendido) por Δ , E es también medial. Pues como el (rectángulo comprendido) por B, Γ es igual al (rectángulo comprendido) por Δ , E y el (rectángulo comprendido) por B, Γ es medial [X 21], entonces el (rectángulo comprendido) por Δ , E es también medial.

Por consiguiente, se han hallado dos (rectas) mediales Δ , E conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) medial, de modo que el cuadrado de la mayor es mayor que el de la menor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (la mayor).

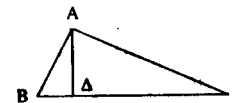
De manera semejante se demostraría también que (el cuadrado de Δ es mayor que el de E) a su vez en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (Δ), siempre que el cuadrado de A sea mayor que el de Γ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (A) ²⁷.

LEMA

Sea AB Γ un triángulo rectángulo que tenga recto el ángulo correspondiente a A y trácese la perpendicular A Δ .

²⁷ Como en la proposición anterior sigo la versión latina de Heiberg entre paréntesis.

Digo que el (rectángulo comprendido) por Γ B, B Δ es igual al cuadrado de BA, mientras que el (rectángulo comprendido)



por B Γ , $\Gamma\Delta$ es igual al cuadrado de Γ A, y el (rectángulo comprendido) por B Δ , $\Delta\Gamma$ es igual al cuadrado de A Δ y además el (rectángulo comprendido) por B Γ , A Δ es igual al (rectángulo comprendido) por BA, A Γ .

En primer lugar (digo) que el (rectángulo comprendido) por Γ B, B Δ es igual al cuadrado de BA.

Pues como, en un triángulo rectángulo, se ha trazado la perpendicular A Δ desde el ángulo recto hasta la base, entonces los triángulos ABA Δ , A $\Delta\Gamma$ son semejantes al triángulo entero AB Γ y entre sí [VI 8]. Y puesto que el triángulo AB Γ es semejante al triángulo ABA Δ , entonces, como Γ B es a BA, así BA a B Δ [VI 4]; luego el (rectángulo comprendido) por Γ B, B Δ es igual al (cuadrado) de AB [VI 17].

Por lo mismo entonces, el (rectángulo comprendido) por B Γ , $\Gamma\Delta$ es igual también al cuadrado de A Γ .

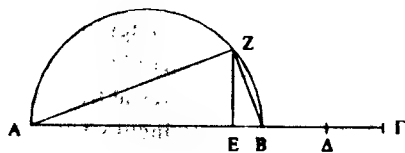
Ahora bien, dado que, si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, la recta trazada es la media proporcional de los segmentos de la base [VI 8 Por.], entonces, como B Δ es a A Δ , así A Δ a $\Delta\Gamma$; luego el (rectángulo comprendido) por B Δ , $\Delta\Gamma$ es igual al cuadrado de A Δ [VI 17].

Digo que el (rectángulo comprendido) por B Γ , A Δ es igual también al (rectángulo comprendido) por BA, A Γ . Pues como, según hemos dicho, el triángulo AB Γ es semejante al (triángulo) ABA Δ , entonces, como B Γ es a Γ A, así BA a A Δ [VI 4]. Por consiguiente, el (rectángulo comprendido) por B Γ , A Δ es igual al (rectángulo comprendido) por BA, A Γ [VI 16] Q. E. D.

PROPOSICIÓN 33

Hallar dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados expresable pero el (rectángulo comprendido) por ellas, medial.

Pónganse dos rectas expresables AB, BΓ conmensurables sólo en cuadrado, de modo que el cuadrado de la mayor, AB,



sea mayor que el cuadrado de la menor, BΓ, en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (AB) [X 30], y divídase BΓ en dos partes iguales por el (punto) Δ, y aplíquese a AB un paralelogramo igual al cuadrado de cada una de las (rectas) BΔ, ΔΓ y deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo comprendido) por AE, EB [VI 28]. Descríbase sobre AB el semicírculo AZB y trácese EZ formando ángulos rectos con AB y trácese AZ, ZB.

Y como AB, BΓ son dos rectas desiguales y el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de BΓ en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (AB), mientras que se ha aplicado a AB un paralelogramo igual a la cuarta parte del cuadrado de BΓ, es decir, al cuadrado de su mitad, y deficiente en la figura de un cuadrado, produciendo el (rectángulo comprendido) por AE, EB, entonces AE es inconmensurable con EB [X 18]. Ahora bien, como AE es a EB, así el (rectángulo comprendido) por BA, AE al (rectángulo comprendido) por AB, BE, mientras que el (rectángulo comprendido) por BA, AE es igual al cuadrado de

AZ, y el (rectángulo comprendido) por AB, BE al cuadrado de BZ; entonces el cuadrado de AZ es inconmensurable con el cuadrado de BZ; luego AZ, ZB son inconmensurables en cuadrado. Y como AB es expresable, entonces el cuadrado de AB es también expresable. De modo que la suma de los cuadrados de AZ, ZB es también expresable [I 47]. Y puesto que a su vez el (rectángulo comprendido) por AE, EB es igual al cuadrado de EZ y se ha supuesto que el (rectángulo comprendido) por AE, EB es igual también al cuadrado de BΔ, entonces ZE es igual a BΔ; luego BΓ es el doble de ZE; de modo que el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es también conmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, EZ. Pero el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es medial [X 21]; luego el (rectángulo comprendido) por AB, EZ es también medial [X 23 Por.]. Pero el (rectángulo comprendido) por AB, EZ es igual al (rectángulo comprendido) por AZ, ZB [lema]; por tanto, el (rectángulo comprendido) por AZ, ZB es también medial. Y se ha demostrado que la suma de sus cuadrados es también expresable.

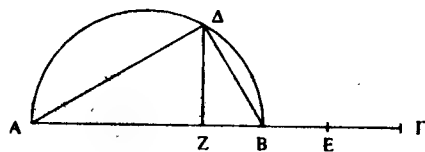
Por consiguiente, se han hallado las dos rectas AZ, ZB inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable pero el (rectángulo comprendido) por ellas, medial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 34

Hallar dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial, pero el rectángulo comprendido por ellas expresable.

Pónganse dos rectas mediales, AB, BΓ, conmensurables sólo en cuadrado, que comprendan un rectángulo expresable, de modo que el cuadrado de AB sea mayor que el de BΓ en el

(cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AB) [X 31 *ad finem*] y describábase sobre AB el semicírculo AΔB, y divídase



ΑΓ en dos partes iguales por el (punto) E, y aplíquese a la recta AB un paralelogramo igual al (cuadrado) de BE deficiente en la figura de un cuadrado, es decir, el (rectángulo comprendido) por AZ, ZB [VI 28]. Entonces AZ es inconmensurable en longitud con ZB [X 18]. Trácese ZΔ, desde Z, formando ángulos rectos con AB, y trácense AΔ, ΔB.

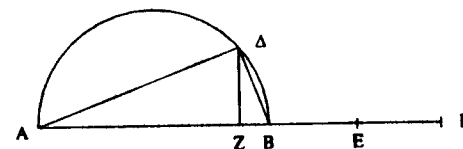
Como AZ es inconmensurable con ZB, entonces el (rectángulo comprendido) por BA, AZ es inconmensurable también con el (rectángulo comprendido) por AB, BZ [X 11]. Pero el (rectángulo comprendido) por BA, AZ es igual al (cuadrado) de AΔ, y el (rectángulo comprendido) por AB, BZ (es igual) al (cuadrado) de ΔB; entonces el (cuadrado) de AΔ es también inconmensurable con el (cuadrado) de ΔB. Y como el (cuadrado) de AB es medial, entonces la suma de los (cuadrados) de AΔ, ΔB es también medial [III 31; I 47]. Y como BΓ es el doble de ΔZ, entonces el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es también el doble del (rectángulo comprendido) por AB, ZΔ. Pero el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es expresable; luego el (rectángulo comprendido) por AB, ZΔ es también expresable [X 6]. Pero el (rectángulo comprendido) por AB, ZΔ es igual al (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB [lema]; de modo que el (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB es también expresable.

Por consiguiente, se han hallado las dos rectas AΔ, ΔB inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial, pero el rectángulo comprendido por ellas expresable.

PROPOSICIÓN 35

Hallar dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas medial y además inconmensurable con la suma de sus cuadrados.

Pónganse dos rectas mediales commensurables sólo en cuadrado AB, BΓ que comprendan un (rectángulo) medial, de



modo que el cuadrado de AB sea mayor que el cuadrado de BΓ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AB) [X 32]. Y describábase sobre AB el semicírculo AΔB, y sea semejante a la anterior el resto (de la construcción).

Ahora bien, como AZ es inconmensurable en longitud con ZB [X 18], AΔ es también inconmensurable en cuadrado con ΔB [X 11]. Y como el (cuadrado) de AB es medial, entonces la suma de los (cuadrados) de AΔ, ΔB es también medial [III 31; I 47]. Ahora bien, como el (rectángulo comprendido) por AZ, ZB es igual al (cuadrado) de cada una de las (rectas) BE, ΔZ, entonces BE es igual a ΔZ; luego BΓ es el doble de ZΔ; de modo que el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es el doble del (rectángulo comprendido) por AB, ZΔ; por tanto, el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es medial; entonces el (rectángulo comprendido) por AB, ZΔ es también medial [X 32 Por.]. Y también es igual al (rectángulo comprendido) por AΔ, ΔB [Lema si-

guiente a X 32]; luego el (rectángulo comprendido) por $\Delta\Lambda$, ΔB es también medial. Ahora bien, como AB es inconmensurable en longitud con $B\Gamma$, mientras que ΓB es conmensurable con BE , entonces AB es inconmensurable en longitud con BE [X 13]; de modo que el (cuadrado) de AB es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB , BE [X 11]. Pero los (cuadrados) de $\Delta\Lambda$, ΔB son iguales al (cuadrado) de AB [I 47], mientras que el (rectángulo comprendido) por AB , ZA , es decir, el (rectángulo comprendido) por $\Delta\Lambda$, ΔB es igual al (rectángulo comprendido) por AB , BE ; por tanto, la suma de los (cuadrados) $\Delta\Lambda$, ΔB es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por $\Delta\Lambda$, ΔB .

Por consiguiente, se han hallado las dos rectas $\Delta\Lambda$, ΔB inconmensurables en cuadrado, que hacen la suma de sus cuadrados medial y el rectángulo comprendido por ellas medial y además inconmensurable con la suma de sus cuadrados. Q. E. D.

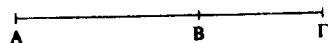
PROPOSICIÓN 36

Si se suman dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, la (recta) entera no es expresable; llámesela binomial.

Súmense, pues, las dos (rectas) expresables AB , $B\Gamma$ conmensurables sólo en cuadrado.

Digo que el total $A\Gamma$ no es expresable.

Pues, dado que AB es inconmensurable en longitud con $B\Gamma$, porque son conmensurables sólo en cuadrado, mientras que, como AB es a $B\Gamma$, así el (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ al (cuadrado) de $B\Gamma$, entonces, el (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ es inconmensurable con el (cuadrado) de $B\Gamma$ [X 11]. Pero el doble del (rectán-



gulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ [X 6], mientras que los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ son conmensurables con el (cuadrado) de $B\Gamma$, porque AB , $B\Gamma$ son expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 15], luego el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ es inconmensurable con los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$. Y, por composición, el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ junto con los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$, es decir, el (cuadrado) de $A\Gamma$ [II 4], es inconmensurable con la suma de los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ [X 16]: pero la suma de los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ es expresable; entonces el cuadrado de $A\Gamma$ no es expresable; de modo que $A\Gamma$ tampoco es expresable; llámesela binomial. Q. E. D. ²⁸.

²⁸ A partir de aquí comienza la denominación, clasificación y descripción de propiedades de tipos de rectas sin razón expresable producidas por la suma o diferencia de dos rectas expresables inconmensurables.

Según FOWLER (art. cit.) el libro X sistematiza pequeños grupos de entre la infinidad de rectas sin razón expresable posibles. Taishak, por su parte, relaciona la denominación, selección y clasificación de estos tipos de rectas con la motivación subyacente, a su juicio, en el libro X de los *Elementos*, a saber: dar los pasos previos necesarios para explicar el lado del pentágono regular y sus relaciones con el diámetro del círculo y los lados del hexágono y decágono regulares que serán expuestas en el libro XIII. Según esta teoría, el término «binomial» respondería a que el diámetro del círculo es la suma de dos lados de cuadrados que no pueden reducirse a uno pero de los que puede hablarse por separado *ek dyo onomátōn*, mientras que el lado del decágono es la diferencia (apóتما) entre los mismos lados de cuadrados.

Las razones de estos nombres así como de otras denominaciones aparentemente más oscuras de tipos de rectas «no expresables» que van surgiendo a lo largo del libro X («mayor», «menor», etc.) probablemente se olvidaron, pero los nombres se mantuvieron junto con las definiciones de sus características. No es de extrañar que los griegos, que están fijando una terminología específica en sus usos de *lógos*, *dýnamis*, *rhētós*, etc., especialicen términos como *meidsōn* o *elássōn* para referirse a las rectas que se dividen de la misma manera que la diagonal y el lado del pentágono regular, las rectas «mayor» y «menor» respectivamente.

PROPOSICIÓN 37

Si se suman dos rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) expresable, la (recta) entera no es expresable; llámesela primera bimedial.

Súmense, pues, las dos rectas mediales AB , $B\Gamma$ conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) expresable.

Digo que el total $A\Gamma$ no es expresable.

Pues como AB es inconmensurable en longitud con $B\Gamma$, entonces los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ [X 36; II 9-20].

Ahora bien, por composición, los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ junto con el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$,

que es precisamente el (cuadrado) de $A\Gamma$ [II 4], es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$; y el (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ es expresable; porque se ha supuesto que AB , $B\Gamma$ comprenden un (rectángulo) expresable. Por tanto, el cuadrado de $A\Gamma$ no es expresable [X Def. 4]; llámesela primera bimedial ²⁹.

²⁹ Aparte de los dos bloques de seis tipos de rectas cada uno, que se agrupan bajo las denominaciones «binomial» y «apótoma» y que serán definidos en las segundas y terceras definiciones respectivamente, aparece en el libro X otra serie de rectas de las que no hay definiciones explícitas. Es el caso de la «primera bimedial» y la «segunda bimedial».

Como explica FOWLER (art. cit., pág. 259) se trata de una clasificación general que abarca trece tipos de rectas, entre las que se contaría la primera bimedial, que no se verá expuesta con claridad hasta el final del libro (X 111). En esta clasificación general no se definen expresamente las rectas que la componen. Hay además una subclasificación de dos bloques de rectas «binomiales» y «apótomas» en seis tipos diferentes cada una que están explícita-

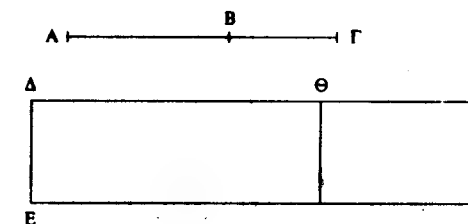
PROPOSICIÓN 38

Si se suman dos rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) medial, la (recta) entera no es expresable; llámesela segunda bimedial.

Súmense, pues, las dos (rectas) mediales AB , $B\Gamma$ conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) medial.

Digo que $A\Gamma$ no es expresable.

Póngase, pues, la (recta) expresable ΔE y aplíquese a ΔE el rectángulo ΔZ igual al (cuadrado) de $A\Gamma$, de modo que produz-



ca la anchura ΔH [I 44]. Y como el (cuadrado) de $A\Gamma$ es igual a los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ y el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ [II 4], aplíquese ahora a ΔE el (rectángulo) $E\Theta$ igual a los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$; entonces el (rectángulo) restante ΘZ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$. Y como cada una de las (rectas) AB , $B\Gamma$ es medial, entonces los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ son también mediales. Pero se ha supuesto que el doble del (rectángulo comprendido) por

mente definidas bajo los rótulos «Segundas definiciones» y «Terceras definiciones» respectivamente. Según Fowler, esta subclasificación responde al mecanismo interno al libro X de hallar rectas sin razón expresable.

AB, BΓ es también medial. Y EΘ es igual a los (cuadrados) de AB, BΓ, mientras que ZΘ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ; entonces cada uno de los (rectángulos) EΘ, ΘZ es medial. Y se han aplicado a la (recta) expresable ΔE; luego cada una de las (rectas) ΔΘ, ΘH es expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]. Así pues, dado que AB es inconmensurable en longitud con BΓ, y que, como AB es a BΓ, así el (cuadrado) de AB al (rectángulo comprendido) por AB, BΓ; entonces el (cuadrado) de AB es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 11]. Pero la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ es conmensurable con el (cuadrado) de AB [X 15], y el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 6]. Por tanto, la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ es inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 13]. Pero EΘ es igual a los (cuadrados) de AB, BΓ, y ΘZ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ. Luego EΘ es inconmensurable con ΘZ; de modo que ΔΘ es también inconmensurable en longitud con ΘH [VI 1]. Entonces ΔΘ, ΘH son expresables conmensurables sólo en cuadrado. De modo que ΔH no es expresable [X 36]. Pero ΔE es expresable; y el rectángulo comprendido por una (recta) no expresable y una expresable no es expresable [X 20]; entonces el área ΔZ no es expresable, y el lado del cuadrado igual a ella no es expresable [X Def. 4]. Pero AΓ es el lado del cuadrado igual a ΔZ; por consiguiente AΓ no es expresable; llámesela segunda bimedial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 39

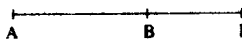
Si se suman dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados expresable y el (rectángulo

comprendido) por ellas medial; la (recta) entera no es expresable; llámesela «mayor».

Súmense pues las dos rectas AB, BΓ inconmensurables en cuadrado que cumplan las condiciones propuestas [X 33].

Digo que AΓ no es expresable.

Pues como el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es medial, el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es medial [X 6 y 23 Por.]. Pero la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ es expresable; entonces el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es inconmensurable con la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ; de modo que los (cuadrados) de AB, BΓ junto con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ, que es precisamente el cuadrado de AΓ también es inconmensurable con la suma de los (cuadrados) de AB, BΓ [X 16]. Por consiguiente, el (cuadrado) de AΓ no es expresable; de modo que AΓ tampoco es expresable [X Def. 4]; llámesela «mayor». Q. E. D.³⁰



PROPOSICIÓN 40

Si se suman dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas expresable, la (recta) entera no es expresable; llámesela lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial.

³⁰ La «mayor» es otra de las rectas que pertenecen a la clasificación que hemos llamado general y que no se definen expresamente. Según Taishak, su nombre obedece probablemente a que corresponde a la recta «mayor» del pentágono regular que es la diagonal.

Súmense, pues, las dos rectas AB , $B\Gamma$ inconmensurables en cuadrado que cumplan las condiciones propuestas [X 34].

Digo que $A\Gamma$ no es expresable.

Pues como la suma de los cuadrados de AB , $B\Gamma$ es medial, el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ es expresable, entonces la suma de los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ es inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ [X 16]. De modo que también el (cuadrado) de $A\Gamma$ es inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$. Pero el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ es expresable; luego el cuadrado de $A\Gamma$ no es expresable. Por tanto, $A\Gamma$ no es expresable; llámesela lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial. Q. E. D. ³¹.

PROPOSICIÓN 41

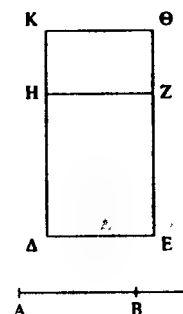
Si se suman dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas también medial e inconmensurable además con la suma de sus cuadrados, entonces la (recta) entera no es expresable; llámesela lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

Súmense, pues, las dos rectas AB , $B\Gamma$ inconmensurables en cuadrado que cumplan las condiciones propuestas [X 35].

Digo que $A\Gamma$ no es expresable.

³¹ El «lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial» es la sexta recta sin razón expresable que aparece en la clasificación general.

Póngase la recta expresable ΔE y aplíquese a ΔE el (rectángulo) ΔZ igual a los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ y el (rectángulo) $H\Theta$ igual al doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$; entonces el (rectángulo) entero $\Delta\Theta$ es igual al (cuadrado) de $A\Gamma$ [II 4] y como la suma de los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ es medial y es igual a ΔZ , entonces ΔZ es medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΔE ; luego ΔH es también expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]. Por lo mismo, HK es también expresable e inconmensurable en longitud con HZ , es decir, con ΔE . Y como los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$, ΔZ es inconmensurable con $H\Theta$; de manera que ΔH también es inconmensurable con HK [VI 1, X 11]. Y son expresables; entonces ΔH , HK son conmensurables sólo en cuadrado; luego ΔK , la llamada binomial, no es expresable [X 36]. Pero ΔE es expresable; entonces el (rectángulo) $\Delta\Theta$ no es expresable, y el lado del cuadrado igual a él no es expresable [X Def. 4]. Pero $A\Gamma$ es el lado del cuadrado igual a $\Theta\Delta$. Por tanto, $A\Gamma$ no es expresable; llámesela lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales. Q. E. D. ³².



LEMA

Y que las antedichas rectas no expresables se dividen de una sola manera en las rectas de las que se componen dando lugar a los tipos propuestos lo demostraremos enseguida, después de adelantar el siguiente lema.

³² En esta proposición se nos muestra la séptima recta sin razón expresable de la clasificación general: «lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales».

Póngase una recta AB y córtese la (recta) entera en partes desiguales por cada uno de los puntos Γ , Δ ; y supóngase que $A\Gamma$ es mayor que ΔB .

Digo que los cuadrados de $A\Gamma$, ΓB son mayores que los cuadrados de $A\Delta$, ΔB .

Divídase, pues, AB en dos partes iguales por el (punto) E . Y como $A\Gamma$ es mayor que ΔB , quítese de ambos $\Delta\Gamma$; entonces la (recta) restante $A\Delta$ es mayor que la (recta) restante ΓB . Pero AE es igual a EB ; entonces AE es menor que $E\Gamma$; luego los



(puntos) Γ , Δ no están a igual distancia del punto de bisección. Y como el (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB junto con el (cuadrado) de $E\Gamma$ es igual al (cuadrado) de EB [II 5], mientras que el (rectángulo comprendido) por $A\Delta$, ΔB junto con el (cuadrado) de AE es igual al (cuadrado) de EB [id.], entonces el (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB junto con el (cuadrado) de $E\Gamma$ es igual al (rectángulo comprendido) por $A\Delta$, ΔB junto con el (cuadrado) de AE ; de los cuales el (cuadrado) de AE es menor que el (cuadrado) de $E\Gamma$; luego el (rectángulo) restante (comprendido) por $A\Gamma$, ΓB es menor que el (rectángulo comprendido) por $A\Delta$, ΔB . De modo que el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB es también menor que el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Delta$, ΔB .

Por consiguiente, el resto, la suma de los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB es mayor que la suma de los (cuadrados) de $A\Delta$, ΔB . Q. E. D. ³³.

³³ En el lema aparece la expresión *poiousôn tà prokeimena eîdē* «dando lugar a los tipos propuestos». La palabra *eîdē*, por contar con un campo semántico tan amplio, resulta sumamente ambigua, la traduzco por «tipos» (de rectas sin razón expresable). La expresión en su conjunto también podría significar aquí «cumpliendo las condiciones propuestas».

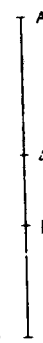
PROPOSICIÓN 42

La recta binomial se divide en sus términos por un sólo punto.

Sea dividida en sus términos la (recta) binomial AB por el (punto) Γ ; entonces $A\Gamma$, ΓB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 36].

Digo que AB no se divide por otro punto en dos rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado.

Pues, si es posible, divídase también por el (punto) Δ , de modo que $A\Delta$, ΔB sean (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Entonces queda claro que $A\Gamma$ no es la misma que ΔB . Pues, si es posible, séalo. Entonces $A\Delta$ será también la misma que ΓB ; y como $A\Gamma$ es a ΓB , así será $B\Delta$ a ΔA , AB resultará dividida también por el punto Δ de la misma manera que por el punto Γ ; lo cual precisamente se ha supuesto que no. Luego $A\Gamma$ no es la misma que ΔB . Por eso los puntos Γ , Δ tampoco están a igual distancia del punto de bisección. Luego en aquello en lo que los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB difieren de los (cuadrados) de $A\Delta$, ΔB , en eso difieren también el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Delta$, ΔB del doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB , porque, tanto los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB junto con el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB , como los (cuadrados) de $A\Delta$, ΔB junto con el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Delta$, ΔB son iguales al (cuadrado) de AB [II 4]. Pero los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB difieren de los (cuadrados) de $A\Delta$, ΔB en un área expresable; pues ambos son expresables; luego el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Delta$, ΔB también difiere del doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB en un área expresable, aún siendo medial [X 21]; lo cual es ab-



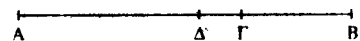
surdo; porque un (área) medial no excede a otra (área) medial en un (área) expresable [X 26].

Por consiguiente, la recta binomial no se divide por diferentes puntos; luego se divide por uno sólo. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 43

La recta primera bimedial se divide por un sólo punto.

Sea dividida la recta primera bimedial AB por el (punto) Γ , de modo que $A\Gamma$, ΓB sean (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) expresable [X 37].



Digo que AB no se divide por otro punto.

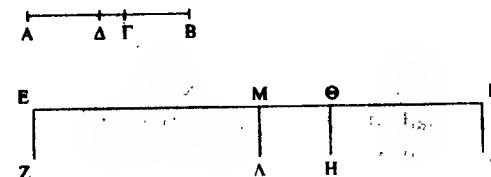
Pues, si es posible, divídase también por el (punto) Δ , de modo que las rectas $A\Delta$, ΔB sean (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que contengan un (rectángulo) expresable. Pues como en aquello en que difiere el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Delta$, ΔB , del doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB , en eso difieren los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB de los (cuadrados) de $A\Delta$, ΔB , mientras que el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Delta$, ΔB difiere del doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB en un (área) expresable, porque ambas son expresables, entonces los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB difieren también de los (cuadrados) de $A\Delta$, ΔB en un (área) expresable, aun siendo mediales; lo cual es absurdo [X 26].

Por consiguiente, la (recta) primera bimedial no se divide en sus términos por diferentes puntos; luego se divide por uno sólo. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 44

La recta segunda bimedial se divide por un sólo punto.

Sea dividida la (recta) segunda bimedial AB por el punto Γ , de modo que $A\Gamma$, ΓB sean (rectas) mediales conmensurables



sólo en cuadrado que comprendan un rectángulo medial [X 38]; entonces queda claro que Γ no es el punto de bisección, porque los segmentos no son conmensurables en longitud.

Digo que AB no se divide por otro punto.

Pues, si es posible, divídase por el (punto) Δ , de modo que $A\Gamma$ no sea la misma que ΔB , sino que $A\Gamma$ sea por hipótesis mayor; entonces es evidente que los (cuadrados) de $A\Delta$, ΔB , según hemos demostrado más arriba [Lema] también son menores que los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB ; supóngase que $A\Delta$, ΔB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un (rectángulo) medial. Y póngase la (recta) expresable EZ, y aplíquese a EZ un paralelogramo rectángulo, EK, igual al (cuadrado) de AB; quítese, por otra parte, EH igual a los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB ; entonces el resto ΘK es igual al doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB [II 4]. Quítese, a su vez, EA igual a los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB que precisamente se ha demostrado que son menores que los de $A\Gamma$, ΓB [Lema]; entonces el (rectángulo) restante MK es también igual al doble del (rectángulo comprendido) por $A\Delta$, ΔB . Y como los (cuadrados)

de AG , GB son mediales, entonces EH es medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable EZ , luego $E\Theta$ es expresable e incommensurable en longitud con EZ [X 22]. Por lo mismo, entonces, ΘN es también expresable e incommensurable en longitud con EZ . Y puesto que AG , GB son mediales y commensurables sólo en cuadrado, entonces AG es incommensurable en longitud con GB . Pero, como AG es a GB , así el (cuadrado) de AG es al (rectángulo comprendido) por AG , GB ; entonces el (cuadrado) de AG es incommensurable con el (rectángulo comprendido) por AG , GB [X 11]; pero los (cuadrados) de AG , GB son commensurables con el (cuadrado) de AG ; porque AG , GB son commensurables en cuadrado [X 15]. Ahora bien, el doble del (rectángulo comprendido) por AG , GB es commensurable con el (rectángulo comprendido) por AG , GB [X 6]. Entonces los (cuadrados) de AG , GB son también incommensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AG , GB [X 13]. Pero EH es igual a los (cuadrados) de AG , GB , mientras que ΘK es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AG , GB ; luego EH es incommensurable con ΘK ; de modo que $E\Theta$ es también incommensurable en longitud con ΘN [VI 1; X 11]. Y son expresables; entonces $E\Theta$, ΘN son (rectas) expresables commensurables sólo en cuadrado. Pero si se suman dos rectas expresables commensurables sólo en cuadrado, la recta entera, la llamada binomial, no es expresable; entonces EN es una (recta) binomial dividida por el (punto) Θ . Siguiendo el mismo procedimiento se demostraría que EM , MN son expresables y commensurables sólo en cuadrado; y EN será una (recta) binomial dividida por los puntos diferentes Θ , M ; ahora bien, $E\Theta$ no es la misma que MN , porque los (cuadrados) de AG , GB son mayores que los (cuadrados) de AD , DB . Pero los cuadrados de AD , DB son mayores que el doble del (rectángulo comprendido) por AD , DB ; luego los (cuadrados) de AG , GB , es decir EH , son mucho mayores que el doble del (rectángulo comprendido)

do) por AD , DB , es decir, MK ; de modo que $E\Theta$ es también mayor que MN .

Por consiguiente, $E\Theta$ no es la misma que MN . Q. E. D.

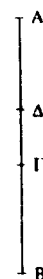
PROPOSICIÓN 45

La recta «mayor» se divide por uno y el mismo punto.

Sea dividida la recta «mayor» AB por el (punto) Γ de modo que AG , GB sean (rectas) incommensurables en cuadrado que hagan la suma de los cuadrados de AG , GB expresable, pero el (rectángulo comprendido) por AG , GB medial [X 39].

Digo que AB no se divide por otro punto.

Pues, si es posible, divídase también por el (punto) Δ de modo que AD , DB sean (rectas) incommensurables en cuadrado que hagan la suma de los cuadrados de AD , DB expresable, pero el (rectángulo comprendido) por ellas medial. Y como en aquello en que los (cuadrados) de AG , GB difieren de los (cuadrados) de AD , DB , en eso difiere también el doble del (rectángulo comprendido) por AD , DB del doble del (rectángulo comprendido) por AG , GB , mientras que los (cuadrados) de AG , GB exceden a los (cuadrados) de AD , DB en un (área) expresable, porque ambos son expresables; entonces el doble del (rectángulo comprendido) por AD , DB también excede del doble del (rectángulo comprendido) por AG , GB en un (área) expresable, aun siendo mediales; lo cual es imposible [X 26]. Luego la (recta) «mayor» no se divide por diferentes puntos. Por consiguiente, se divide sólo por uno y el mismo punto. Q. E. D.



PROPOSICIÓN 46

El lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial se divide sólo por un punto.

Sea dividido el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más un área medial AB por el punto Γ , de modo que $A\Gamma$, ΓB sean (rectas) inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB medial, y el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΔB expresable [X 40].

Digo que AB no se divide por otro punto.

Pues, si es posible, divídase también por el (punto) Δ , de modo que $A\Delta$, ΔB sean (rectas) inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de los (cuadrados) de $A\Delta$, ΔB medial y el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Delta$, ΔB expresable. Pues como en aquello en que difiere el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB del doble del (rectángulo comprendido) por $A\Delta$, ΔB , en eso difieren también los (cuadrados) de $A\Delta$, ΔB de los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB y el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB excede del doble del (rectángulo comprendido) por $A\Delta$, ΔB en un (área) expresable, entonces los (cuadrados) de $A\Delta$, ΔB también exceden a los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB en un (área) expresable, aún siendo mediales; lo cual es imposible [X 26]. Luego el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más un (área) medial no se divide por diferentes puntos.

Por consiguiente, se divide por un solo punto. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 47

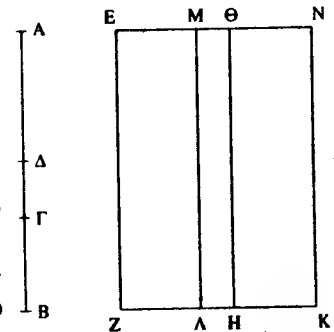
El lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales se divide por un sólo punto.

Sea dividida AB por el punto Γ , de modo que $A\Gamma$, ΓB sean (rectas) inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de los cuadrados de $A\Gamma$, ΓB medial y el (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB medial también e inconmensurable con la suma de sus cuadrados.

Digo que AB no se divide por otro punto cumpliendo las condiciones propuestas.

Pues, si es posible, divídase por el (punto) Δ de modo que sea evidente que $A\Gamma$ no es la misma que ΔB , sino mayor que $A\Gamma$ por hipótesis.

Y póngase la (recta) expresable EZ, y aplíquese a EZ el (rectángulo) EH igual a los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB , y el rectángulo ΘK igual al doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB ; entonces el (rectángulo) entero EK es igual al cuadrado de AB [II 4]. Aplíquese, a su vez, a EZ el (rectángulo) EA igual a los (cuadrados) de $A\Delta$, ΔB ; entonces, el resto, el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Delta$, ΔB es igual al resto MK. Y como se ha supuesto que la suma de los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB es medial, entonces EH también es medial. Y se ha aplicado a la (recta expresable) EZ. Luego ΘE es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Por lo mismo, entonces, ΘN es una recta expresable inconmensurable en longitud con EZ. Y como la suma de los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB es inconmensurable con



el doble del (rectángulo comprendido) por $ΑΓ$, $ΓΒ$, entonces $ΕΗ$ es inconmensurable con $ΗΝ$; de modo que $ΕΘ$ es inconmensurable con $ΘΝ$ [VI 1; X 11]. Y son expresables; entonces $ΕΘ$, $ΘΝ$ son expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego $ΕΝ$ es una (recta) binomial dividida por el (punto) $Θ$ [X 36]. De manera semejante demostraríamos que también se divide por el (punto) $Μ$. Ahora bien, $ΕΘ$ no es la misma que $ΜΝ$; entonces una (recta) binomial se ha dividido por dos puntos diferentes; lo cual es absurdo [X 42]. Luego el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales no se divide por dos puntos diferentes.

Por consiguiente, se divide por uno sólo.

SEGUNDAS DEFINICIONES³⁴

1. Dada una recta expresable y otra binomial dividida en sus términos, de forma que el cuadrado del término mayor sea mayor que el cuadrado del (término) menor en el (cuadrado) de una recta conmensurable en longitud con él (el mayor); si el término mayor es conmensurable en longitud con la recta expresable dada, llámese (la recta entera) *primera binomial*.
2. Y si el término menor es conmensurable en longitud con la (recta) expresable, llámese (la recta entera) *segunda binomial*.

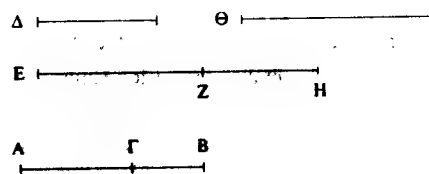
³⁴ Tras los siete primeros tipos de rectas (medial, binomial, primera bimedial, segunda bimedial, mayor, lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial y lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales) y sus propiedades, Euclides presenta en estas Segundas Definiciones una subclasificación de las binomiales en seis tipos diferentes. En las proposiciones 48-53 enseña la forma de hallar cada una de ellas.

3. Pero si ninguno de los términos es conmensurable en longitud con la recta expresable dada, llámese (la recta entera) *tercera binomial*.
4. Si el cuadrado del término mayor es, a su vez, mayor (que el del menor) en el cuadrado de una (recta) inconmensurable en longitud con el mayor, entonces, si el término mayor es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada, llámese (la recta entera) *cuarta binomial*.
5. Pero si (lo es) el menor, *quinta*.
6. Y si ninguno de los dos, *sexta*.

PROPOSICIÓN 48

Hallar una recta primera binomial

Pónganse dos números $ΑΓ$, $ΓΒ$ de modo que su suma $ΑΒ$ guarde con $ΒΓ$ la razón que un número cuadrado guarda con un



número cuadrado, pero no guarde con $ΓΑ$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado [Lema 1 después de X 28]. Y póngase una recta expresable $Δ$, y sea la recta $ΕΖ$ conmensurable en longitud con $Δ$. Entonces $ΕΖ$ es también expresable. Y como el número $ΒΑ$ es al número $ΑΓ$, sea así el cuadrado de $ΕΖ$ al cuadrado de $ΖΗ$ [X 6 Por.]. Pero $ΑΒ$ guarda con $ΑΓ$ la razón que un número guarda con un número; entonces el cuadrado de $ΕΖ$ guarda también con el cuadrado de

ZH la razón que un número guarda con un número; de modo que el (cuadrado) de EZ es conmensurable con el (cuadrado) de ZH [X 6]. Y EZ es expresable, luego ZH es también expresable. Ahora bien, dado que BA no guarda con $\Gamma\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el cuadrado de EZ tampoco guarda con el cuadrado de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego EZ es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]. Entonces EZ, ZH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Luego EH es binomial [X 36].

Digo que también es primera.

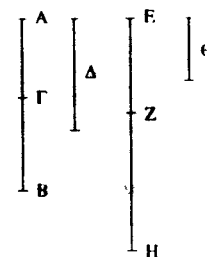
Pues, dado que como el número BA es al (número) $\Gamma\Gamma$, así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH, y que BA es mayor que $\Gamma\Gamma$, entonces, el (cuadrado) de EZ es también mayor que el (cuadrado) de ZH. Sean, pues, los (cuadrados) de ZH, Θ iguales al (cuadrado) de EZ. Y dado que, como BA es a $\Gamma\Gamma$, así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH, entonces, por conversión, como AB es a $\Gamma\Gamma$, así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de Θ [V 19 Por.]. Pero AB guarda con $\Gamma\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de EZ guarda con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego EZ es conmensurable en longitud con Θ [X 9]; por tanto, el cuadrado de EZ es mayor que el (cuadrado) de ZH en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (EZ). Y EZ, ZH son (rectas) expresables, y EZ es conmensurable en longitud con Δ .

Por consiguiente EH es una primera binomial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 49

Hallar una (recta) segunda binomial.

Pónganse dos números $\Gamma\Gamma$, $\Gamma\Gamma$ de modo que su suma AB guarde con $\Gamma\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, pero no guarde con $\Gamma\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, y póngase la recta expresable Δ , y sea la recta EZ conmensurable en longitud con Δ ; entonces EZ es expresable. Y hágase de forma que, como el número $\Gamma\Gamma$ es al número AB, sea así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de EZ es conmensurable con el cuadrado de ZH [X 6]. Luego ZH es expresable. Ahora bien, dado que el número $\Gamma\Gamma$ no guarda con el (número) AB la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, ni el cuadrado de EZ guarda con el (cuadrado) de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces EZ es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]; luego EZ, ZH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, EH es binomial.



Hay que demostrar ahora que también es segunda.

Pues, dado que, por inversión, como el número BA es al (número) $\Gamma\Gamma$, así el (cuadrado) de HZ al (cuadrado) de ZE, mientras que BA es mayor que $\Gamma\Gamma$; entonces el cuadrado de HZ es mayor que el (cuadrado) de ZE.

Sean los (cuadrados) de EZ, Θ iguales al (cuadrado) de HZ; entonces, por conversión, como AB es a $\Gamma\Gamma$, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de Θ [V 19 Por.]. Pero AB guarda con $\Gamma\Gamma$ la

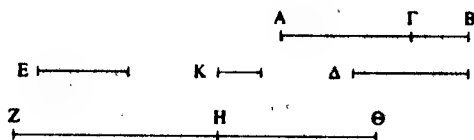
razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego el (cuadrado) de ZH guarda también con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Por tanto, ZH es conmensurable en longitud con Θ [X 9]; de modo que el cuadrado de ZH es mayor que el cuadrado de ZE en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ZH). Ahora bien, ZH, ZE son (rectas) racionales conmensurables sólo en cuadrado, y el término menor EZ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada Δ .

Por consiguiente, EH es una segunda binomial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 50

Hallar una (recta) tercera binomial.

Pónganse dos números $A\Gamma$, ΓB de modo que su suma AB guarde con $B\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un



número cuadrado, pero no guarde con $A\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Póngase otro número cualquiera Δ , que no sea cuadrado y que no guarde con ninguno de los números BA, $A\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; póngase una recta expresable E y hágase de forma que, como Δ es a AB, sea así el (cuadrado) de E al cuadrado de la (recta) ZH [X 6 Por.]. Entonces, el cuadrado de E es conmensurable con el (cuadrado) de ZH [X 6]. Ahora bien, E es una (recta) expresable; luego ZH es

también expresable. Y dado que Δ no guarda con AB la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, ni el cuadrado de E guarda con el (cuadrado) de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces E es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]. Hágase de forma que, como el número BA es al (número) $A\Gamma$, sea así, a su vez, el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de $H\Theta$ [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de ZH es conmensurable con el (cuadrado) de $H\Theta$ [X 6]. Pero ZH es una (recta) expresable; entonces $H\Theta$ es también expresable. Y dado que BA no guarda con $A\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, el (cuadrado) de ZH tampoco guarda con el (cuadrado) de $H\Theta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Entonces ZH es inconmensurable en longitud con $H\Theta$ [X 9]. Luego ZH, $H\Theta$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, Z Θ es binomial [X 36].

Digo que también es tercera.

Así pues, dado que como Δ es a AB, así el (cuadrado) de E es al (cuadrado) de ZH, mientras que, como BA es a $A\Gamma$, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de $H\Theta$, entonces, por igualdad, como Δ es a $A\Gamma$, así el (cuadrado) de E al (cuadrado) de $H\Theta$ [V 22]. Pero Δ no guarda con $A\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de E tampoco guarda con el cuadrado de $H\Theta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego E es inconmensurable en longitud con $H\Theta$ [X 9]. Ahora bien, dado que, como BA es a $A\Gamma$, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de $H\Theta$, entonces el (cuadrado) de ZH es mayor que el (cuadrado) de $H\Theta$. Pues bien, sean los (cuadrados) de $H\Theta$, K iguales al (cuadrado) de ZH; entonces, por conversión, como AB es a $B\Gamma$, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de K [V 19 Por.]. Pero AB guarda con $B\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de ZH guarda con el

(cuadrado) de K la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego ZH es conmensurable en longitud con K [X 9]. Por tanto, el cuadrado de ZH es mayor que el cuadrado de HΘ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ZH). Y ZH, HΘ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y ninguna de ellas es conmensurable en longitud con E.

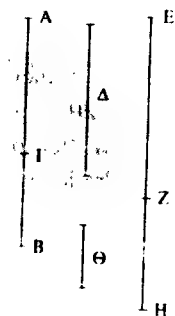
Por consiguiente, ZΘ es una tercera binomial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 51

Hallar una (recta) cuarta binomial.

Pónganse dos números AΓ, ΓB de modo que AB no guarde ni con BΓ, ni con AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Póngase la recta expresable Δ y sea la (recta) EZ conmensurable en longitud con Δ; entonces EZ es expresable. Y hágase de forma que, como el número BA es al (número) AΓ, sea así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH [X 6 Por.]. Entonces el (cuadrado) de EZ es conmensurable con el (cuadrado) de ZH [X 6]. Luego ZH es también expresable. Y dado que BA no guarda con AΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, ni el (cuadrado) de EZ guarda con el (cuadrado) de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces EZ es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]. Luego EZ, ZH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; de modo que EH es binomial.

Digo ahora que también es cuarta.



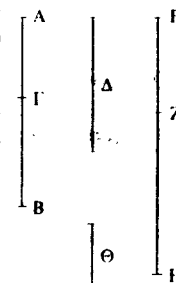
Pues, dado que como BA es a AΓ, así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH, entonces el (cuadrado) de EZ es mayor que el (cuadrado) de ZH. Pues bien, sean los (cuadrados) de ZH, Θ iguales al (cuadrado) de EZ; entonces, por conversión, como el número AB es al (número) BΓ, así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de Θ [V 19 Por.]. Pero AB no guarda con BΓ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de EZ tampoco guarda con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego EZ es inconmensurable en longitud con Θ [X 9]. Por tanto, el cuadrado de EZ es mayor que el de HZ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (EZ). Ahora bien, EZ, ZH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y EZ es conmensurable en longitud con Δ.

Por consiguiente, EH es una cuarta binomial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 52

Hallar una (recta) quinta binomial.

Pónganse dos números AΓ, ΓB de modo que AB no guarde con ninguno de ellos la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; póngase una (recta) expresable cualquiera Δ, y sea la (recta) EZ conmensurable con Δ; entonces EZ es expresable. Hágase de forma que como ΓA es a AB, sea así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH [X 6 Por.]. Pero ΓA no guarda con AB la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de EZ tampoco guarda con el (cuadrado) de ZH la razón, que un número cuadrado guarda con un número



cuadrado. Luego EZ, ZH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 9]. Por tanto, EH es binomial [X 36].

Digo ahora que también quinta.

Pues, dado que, como ΓA es a AB , así el (cuadrado) de EZ al (cuadrado) de ZH, entonces, por inversión, como BA es a $A\Gamma$, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de ZE. Luego el (cuadrado) de HZ es mayor que el (cuadrado) de ZE. Pues bien, sean los (cuadrados) de EZ, Θ iguales al (cuadrado) de HZ; entonces, por conversión, como el número AB es al (número) $B\Gamma$, así el (cuadrado) de HZ al (cuadrado) de Θ [V 19 Por.]. Pero AB no guarda con $B\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de ZH tampoco guarda con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego ZH es inconmensurable en longitud con Θ [X 9]; de modo que el (cuadrado) de ZH es mayor que el (cuadrado) de ZE en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ZH). Y HZ, ZE son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el término menor EZ es conmensurable en longitud con la recta expresable dada Δ .

Por consiguiente, EH es una quinta binomial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 53

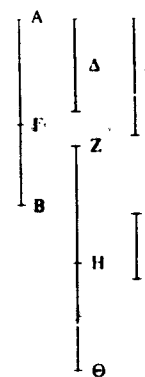
Hallar una (recta) sexta binomial.

Pónganse dos números $A\Gamma$, ΓB , de modo que AB no guarde con ninguno de ellos la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y haya también otro número Δ que no sea cuadrado y no guarde con ninguno de los (números) BA , $A\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; póngase una (recta) expresable E , y hágase de forma que, como Δ es a AB , sea así también el (cuadrado) de E

al (cuadrado) de ZH [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de E es conmensurable con el (cuadrado) de ZH [X 6]. Ahora bien, E es expresable; luego ZH es también expresable. Y como Δ no guarda con AB la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de E tampoco guarda con el (cuadrado) de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego E es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]. Además hágase de forma que, como BA es a $A\Gamma$, así, a su vez, el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de $H\Theta$ [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de ZH es conmensurable con el (cuadrado) de $H\Theta$; luego el (cuadrado) de $H\Theta$ es expresable; por tanto, $H\Theta$ es expresable. Y puesto que BA no guarda con $A\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, ni el (cuadrado) de ZH guarda con el (cuadrado) de $H\Theta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces ZH es inconmensurable en longitud con $H\Theta$ [X 9]. Luego ZH, $H\Theta$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto, $Z\Theta$ es binomial [X 36].

Hay que demostrar ahora que también es sexta.

Pues bien, dado que como Δ es a AB , así el (cuadrado) de E al (cuadrado) de ZH, pero también, como BA es a $A\Gamma$, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de $H\Theta$, entonces, por igualdad, como Δ es a $A\Gamma$, así el (cuadrado) de E al (cuadrado) de $H\Theta$ [V 22]. Pero Δ no guarda con $A\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de E no guarda con el (cuadrado) de $H\Theta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego E es inconmensurable en longitud con $H\Theta$ [X 9]. Pero se ha demostrado que es también inconmensurable con ZH; entonces cada una de

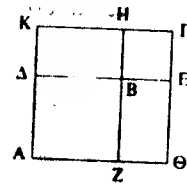


las (rectas) ZH , $H\Theta$ es inconmensurable en longitud con E . Y dado que, como BA es a AG , así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de $H\Theta$, entonces el (cuadrado) de ZH es mayor que el (cuadrado) de $H\Theta$. Sean, pues, los cuadrados de $H\Theta$, K iguales al (cuadrado) de ZH ; entonces, por conversión, como AB es a $B\Gamma$, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de K [V 19 Por.]. Pero AB no guarda con $B\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; de modo que el (cuadrado) de ZH tampoco guarda con el (cuadrado) de K la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego ZH es inconmensurable en longitud con K [X 9]; entonces el cuadrado de ZH es mayor que el de $H\Theta$ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ZH). Ahora bien, ZH , $H\Theta$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y ninguna de ellas es conmensurable en longitud con la recta expresable dada E .

Por consiguiente, $Z\Theta$ es una sexta binomial. Q. E. D.

LEMA

Sean AB , $B\Gamma$ dos cuadrados y pónganse de modo que ΔB esté en línea recta con BE ; entonces ZB está también en línea recta con BH . Complétese el paralelogramo AG .



Digo que AG es un cuadrado y que ΔH es media proporcional de AB , $B\Gamma$ y además $\Delta\Gamma$ es media proporcional de AG , ΓB .

Pues como ΔB es igual a BZ , y BE a BH , entonces la (recta) entera ΔE es igual a la (recta) entera ZH . Pero ΔE es igual a cada una de las (rectas) $A\Theta$, $K\Gamma$, mientras que ZH es igual a cada una de las (rectas) AK , $\Theta\Gamma$ [I 34]. Entonces, las (rectas) $A\Theta$, $K\Gamma$ son iguales respectivamente a las (rectas) AK , $\Theta\Gamma$. Luego el paralelogramo AG es equilátero. Pero también es rectangular; entonces AG es un cuadrado.

Y dado que, como ZB es a BH , así ΔB a BE , mientras que, como ZB es a BH , así AB a ΔH , y como ΔB es a BE , así ΔH a $B\Gamma$ [VI 1], entonces también, como AB es a ΔH , así ΔH a $B\Gamma$ [V 11]; luego ΔH es media proporcional de AB , $B\Gamma$.

Digo ahora que $\Delta\Gamma$ es también media proporcional de AG , ΓB .

Pues, dado que, como $\Delta\Delta$ es a ΔK , así KH a $H\Gamma$, porque son iguales respectivamente, y, por composición, como AK es a $K\Delta$, así $K\Gamma$ es a ΓH [V 18], mientras que, como AK es a $K\Delta$, así AG a $\Gamma\Delta$, y como $K\Gamma$ es a ΓH , así $\Delta\Gamma$ a ΓB [VI 1], entonces, como AG es a $\Delta\Gamma$, así también $\Delta\Gamma$ a $B\Gamma$ [V 11].

Por consiguiente, $\Delta\Gamma$ es media proporcional de AG , ΓB . (Que es) lo que se ha propuesto demostrar ³⁵.

PROPOSICIÓN 54

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una primera binomial, el lado del cuadrado equivalente al (área) es la (recta) no expresable llamada binomial.

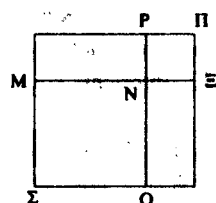
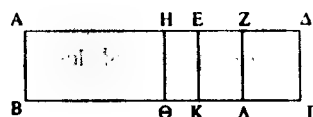
Esté comprendida, pues, el área AG por la (recta) expresable AB y la primera binomial AG .

Digo que el lado del cuadrado equivalente al (área) AG es la (recta) no expresable llamada binomial.

Pues como $\Delta\Delta$ es una (recta) primera binomial, divídase en sus términos por el (punto) E , y sea AE el término mayor. Queda claro, entonces, que AE , $E\Delta$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de AE es mayor que el de $E\Delta$ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable

³⁵ Un rectángulo es media proporcional de los cuadrados de sus lados.

con ella (AE), y AE es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada AB [X Segundas definiciones 1]. Divídase,



pues, EA en dos partes iguales por el punto Z. Y como el cuadrado de AE es mayor que el de EA en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (AE), entonces, si se aplica a la (recta) mayor AE un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor, es decir, al cuadrado de EZ y deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en (partes) conmensurables [X 17]. Aplíquese, pues, a AE el (rectángulo comprendido) por AH, HE igual al cuadrado de EZ; entonces AH es conmensurable en longitud con EH. Trácese, a partir de los (puntos) H, E, Θ, las rectas HΘ, EK, ZΛ paralelas a cada una de las (rectas) AB, ΓΔ; y constrúyase el cuadrado ΣN igual al paralelogramo AΘ, y el (cuadrado) NΠ igual al (paralelogramo) HK [II 14], y hágase de forma que MN esté en línea recta con NE; entonces PN está en línea recta con NO. Y complétese el paralelogramo ΣΠ; entonces ΣΠ es un cuadrado [Lema]. Y como el (rectángulo comprendido) por AH, HE es igual al (cuadrado) de EZ, entonces, como AH es a EZ, así ZE a EH [VI 17]; luego como AΘ es a EA, EA es a KH [VI 1]; por tanto, EA es media proporcional de AΘ, HK. Pero AΘ es igual a ΣN, y HK es igual a NΠ; luego EA es media proporcional de ΣN, NΠ. Pero MP es media proporcional de los mismos ΣN, NΠ [Lema]; luego EA es igual a MP; de modo que también es igual a OE: pero AΘ, HK son iguales a ΣN, NΠ; entonces el (paralelogramo) entero AΓ es igual al (paralelogramo) entero ΣΠ, es decir, al cuadrado de ME; entonces ME es el lado del cuadrado equivalente a AΓ.

Digo que ME es binomial.

Pues como AH es conmensurable con HE, AE es también conmensurable con cada una de las (rectas) AH, HE [X 15]. Pero se ha supuesto que AE es también conmensurable con AB; luego AH, HE son conmensurables con AB [X 12]; y AB es expresable, luego cada una de las (rectas) AH, HE es también expresable; por tanto, cada uno de los (rectángulos) AΘ, HK es expresable [X 19], y AΘ es conmensurable con HK. Pero AΘ es igual a ΣN y HK a NΠ; entonces ΣN, NΠ, es decir, los cuadrados de MN, NE son expresables y conmensurables. Ahora bien, dado que AE es inconmensurable en longitud con EA, mientras que AE es conmensurable con AH, y AE es conmensurable con EZ, entonces AH es inconmensurable con EZ [X 13], de modo que AΘ es inconmensurable con EA [V 1; X 11]. Pero AΘ es igual a ΣN, y EA a MP; entonces ΣN es inconmensurable con MP. Pero como ΣN es a MP, ON es a NP [VI 1]; luego ON es inconmensurable con NP [X 11]. Pero ON es igual a MN, y NP a NE. Luego MN es inconmensurable con NE. Y el cuadrado de MN es conmensurable con el (cuadrado) de NE, y cada uno de ellos es expresable; por tanto MN, NE son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado.

Por consiguiente, ME es binomial y el lado del cuadrado equivalente a AΓ. Q. E. D.

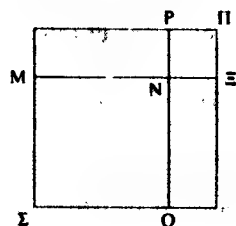
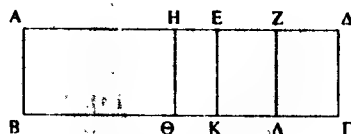
PROPOSICIÓN 55

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una segunda binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la recta no expresable llamada primera bimedial.

Esté, pues, comprendida el área ABΓΔ por la (recta) expresable AB y la segunda binomial AΔ.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área $A\Gamma$ es una (recta) primera bimedial.

Pues como $A\Delta$ es una (recta) segunda binomial, divídase en sus términos por el (punto) E , de modo que AE sea el término mayor; entonces AE , $E\Delta$ son



(rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de AE es mayor que el de $E\Delta$ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (AE), y el término menor $E\Delta$ es conmensurable en longitud con AB [X, segundas definiciones, 2]. Divídase $E\Delta$ en dos partes iguales por el (punto) Z , y aplíquese a AE el rectángulo AHE igual al cuadrado de EZ y deficiente en la figura de un cuadrado. Entonces AH es conmensurable en longitud con HE [X 17]. Y trácese por los (puntos) H , E , Z las (rectas) $H\Theta$, EK , $Z\Lambda$ paralelas a AB , $\Gamma\Delta$, y constrúyase el cuadrado ΣN , igual al paralelogramo $A\Theta$, y el cuadrado $N\Pi$ igual al (paralelogramo) HK , y hágase de modo que MN , $N\Xi$ estén en línea recta. Entonces PN está también en línea recta con NO . Complétese el cuadrado $\Sigma\Pi$; queda claro, entonces, a partir de lo demostrado anteriormente, que MP es media proporcional de ΣN , $N\Pi$ y es igual a $E\Lambda$ y que $M\Xi$ es el lado del cuadrado equivalente al área $A\Gamma$. Hay que demostrar ahora que $M\Xi$ es una (recta) primera bimedial. Puesto que AE es inconmensurable en longitud con $E\Delta$, mientras que $E\Delta$ es conmensurable con AB , entonces AE es inconmensurable con AB [X 13]. Ahora bien, puesto que AH es conmensurable con EH , AE es conmensurable también con cada una de las (rectas) AH ,

HE [X 15]. Pero AE es inconmensurable en longitud con AB ; luego AH , HE son inconmensurables también con AB [X 13]. Por tanto BA , AH , HE (es decir: BA , AH y BA , HE) son (pares de) rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado³⁶; de modo que cada uno de los (rectángulos) $A\Theta$, HK es medial [X 21]. De manera que cada uno de los (rectángulos) $A\Theta$, HK es medial [X 21]. De manera que cada uno de los (cuadrados) ΣN , $N\Pi$ es también medial. Entonces las (rectas) MN , $N\Xi$ son también mediales. Y dado que AH es conmensurable en longitud con HE , el (rectángulo) $A\Theta$ es conmensurable también con el (rectángulo) HK [VI 1; X 11], es decir el (cuadrado) de ΣN con el (cuadrado) de $N\Pi$, es decir el (cuadrado) de MN con el (cuadrado) de $N\Xi$. Ahora bien, como AE es inconmensurable en longitud con $E\Delta$, mientras que AE es conmensurable con AH , y $E\Delta$ es conmensurable con EZ , entonces AH es inconmensurable con EZ [X 13]; de modo que el (rectángulo) $A\Theta$ es inconmensurable con el (rectángulo) $E\Lambda$, es decir el (cuadrado) ΣN con el (cuadrado) MP , esto es la (recta) ON con la (recta) NP [VI 1; X 11]. Es decir, MN es inconmensurable en longitud con $N\Xi$. Pero se ha demostrado que MN , $N\Xi$ son tanto mediales como conmensurables en cuadrado; entonces MN , $N\Xi$ son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado.

Digo además que comprenden un (rectángulo) expresable.

Pues como se ha supuesto que ΔE es conmensurable con cada una de las (rectas) AB , EZ , entonces EZ lo es también con EK . Y cada una de ellas es expresable. Por tanto, $E\Lambda$, es decir MP es expresable [X 19]; pero MP es el rectángulo $MN\Xi$.

³⁶ Suplo entre paréntesis las aclaraciones «(es decir: BA , AH y BA , HE) son (pares de)...» que no aparecen en el texto griego. Una traducción literal podría dar la impresión de que dos cualesquiera de las tres rectas citadas son conmensurables sólo en cuadrado. Ahora bien, AH , HE son, de hecho, conmensurables en longitud y únicamente las del otro par son conmensurables sólo en cuadrado.

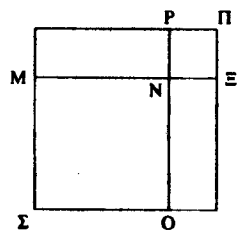
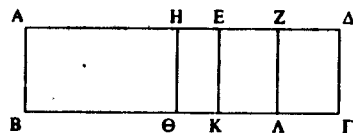
Ahora bien, si se suman dos (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un rectángulo expresable, la (recta) entera no es expresable y se llama primera bimedial [X 37].

Por consiguiente, ME es una primera bimedial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 56

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una tercera binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) no expresable llamada segunda bimedial.

Sea, pues, comprendida el área $AB\Gamma\Delta$ por la (recta) expresable AB y la tercera binomial $A\Delta$ dividida por el (punto) E en sus términos, de los cuales el mayor es AE .



Digo que el lado del cuadrado equivalente al área $A\Gamma$ es la (recta) no expresable llamada segunda bimedial.

Sígase, pues, la misma construcción de la proposición anterior. Y como $A\Delta$ es una tercera binomial, entonces AE , $E\Delta$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de AE es mayor que el de $E\Delta$ en el (cuadrado) de una

recta conmensurable con ella (AE), y ninguno de los (términos) AE , $E\Delta$ es conmensurable en longitud con AB [X Segundas Definiciones 3].

De manera semejante a los (teoremas) anteriores demostráramos que ME es el lado del cuadrado equivalente al área $A\Gamma$, y MN , NE son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado; de modo que ME es bimedial.

Hay que demostrar ahora que es también segunda.

Puesto que ΔE es inconmensurable en longitud con AB , es decir con EK , mientras que ΔE es conmensurable con EZ , entonces EZ es inconmensurable en longitud con EK [X 13]. Y son expresables; entonces ZE , EK son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Luego EA , es decir MP , es medial [X 21], y está comprendido por MN , NE : entonces el (rectángulo comprendido) por MN , NE es medial.

Por consiguiente, ME es una segunda bimedial.

PROPOSICIÓN 57

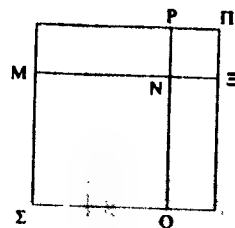
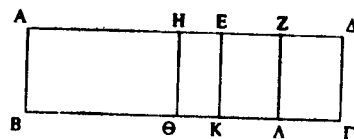
Si un área está comprendida por una recta expresable y una cuarta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) no expresable llamada «mayor».

Esté, pues, comprendida el área $A\Gamma$ por la (recta) expresable AB y la cuarta binomial $A\Delta$, dividida por el (punto) E en sus términos, de los cuales sea mayor AE .

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área $A\Gamma$ es la (recta) no expresable llamada «mayor».

Pues como $A\Delta$ es una cuarta binomial, entonces AE , $E\Delta$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de AE es mayor que el de $E\Delta$ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AE), y AE es conmensurable en longitud con AB [X segundas definiciones 4]. Divídase ΔE en dos partes iguales por el (punto) Z , y aplíquese a AE un paralelogramo, el (rectángulo comprendido) por AH , HE , igual

al (cuadrado) de EZ. Entonces AH es incommensurable en longitud con HE [X 18]; trácense HΘ, EK, ZA paralelas a AB, y sígase la misma construcción que en las proposiciones anteriores; queda claro, entonces, que ME es el lado del cuadrado equivalente al área AΓ.



Hay que demostrar ahora que ME es la (recta) no expresable llamada «mayor». Puesto que AH es incommensurable en longitud con EH, el (rectángulo) AΘ es incommensurable también con el (rectángulo) HK, es decir el (cuadrado) ΣN con el cuadrado NΠ; entonces MN, NΞ son incommensurables en cuadrado. Y como AE es commensurable en longitud con AB, AK es expresable [X 19]; y es igual a los (cuadrados) de MN, NΞ; entonces la suma de los (cuadrados) de MN, NΞ es también expresable. Ahora bien, puesto que ΔE es incommensurable en longitud con AB, es decir con EK, mientras que ΔE es commensurable con EZ, entonces EZ es incommensurable en longitud con EK [X 13]. Por tanto, EK, EZ son (rectas) expresables commensurables sólo en cuadrado; luego AE, es decir MP, es medial [X 21]. Y está comprendida por MN, NΞ; luego el (rectángulo comprendido) por MN, NΞ es medial. Y la [suma] de los (cuadrados) de MN, NΞ es expresable, y MN, NΞ son incommensurables en cuadrado. Pero, si se suman dos rectas incommensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados expresable y el (rectángulo comprendido) por ellas medial, la recta entera no es expresable y se llama «mayor» [X 39].

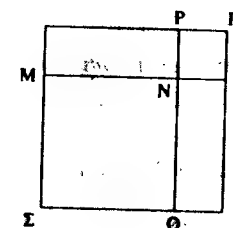
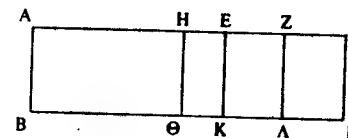
Por consiguiente, ME es la (recta) no expresable llamada «mayor» y es el lado del cuadrado equivalente al área AΓ. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 58

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una quinta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) no expresable llamada lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial.

Esté, pues, comprendida el área AΓ por la (recta) expresable AB y la quinta binomial AΔ dividida en sus términos por el (punto) E, de modo que AE sea el término mayor.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AΓ es la (recta) no expresable llamada lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial.



Sígase la misma construcción que en las demostraciones anteriores. Queda claro, entonces, que ME es el lado del cuadrado equivalente al área AΓ.

Hay que demostrar ahora que ME es el lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial. Pues como AH es incommensurable con HE [X 18], entonces AΘ es incommensurable con ΘE [VI 1; X 11], es decir el cuadrado de

MN con el cuadrado de NE; entonces MN, NE son inconmensurables en cuadrado. Y como AA es una quinta bimedial, y el segmento EA es su segmento menor, entonces EA es conmensurable en longitud con AB [X segundas definiciones 5]. Pero AE es inconmensurable con EA; entonces AB es también inconmensurable en longitud con AE [X 13]; luego AK, es decir la suma de los (cuadrados) de MN, NE es medial [X 21]. Y como AE es conmensurable en longitud con AB, es decir con EK, mientras que AE es conmensurable con EZ, entonces EZ es conmensurable con EK [X 12]. Luego EK es expresable; entonces EA, es decir MP, esto es el (rectángulo) MNE es también expresable [X 19]; luego MN, NE son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas expresable.

Por consiguiente, ME es el lado del cuadrado equivalente a un área expresable más un área medial [X 40] y es el lado del cuadrado equivalente al área AF. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 59

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una sexta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la recta no expresable llamada lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

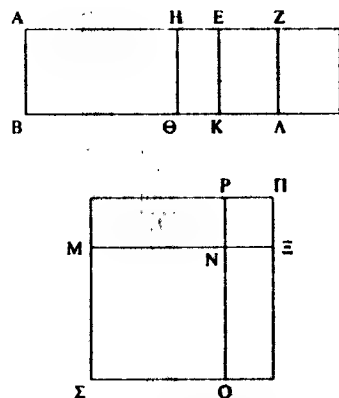
Esté, pues, comprendida el área ABΓΔ por la (recta) expresable AB y la sexta binomial AΔ, dividida en sus términos por el (punto) E de modo que AE sea el término mayor.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al (área) AF es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales.

Sígase la misma construcción que en las demostraciones

anteriores. Queda claro, entonces, que ME es el lado del cuadrado equivalente al (área) AF y que MN es inconmensurable en cuadrado con NE. Y

como EA es inconmensurable en longitud con AB, entonces EA, AB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; entonces AK, es decir la suma de los (cuadrados) de MN, NE es medial [X 21]; puesto que EA es a su vez inconmensurable en longitud con AB, entonces ZE es también inconmensurable en longitud con EK [X 13]; luego



ZE, EK son rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado, por tanto EA, es decir MP, esto es el (rectángulo) MN, NE es también medial [X 21]. Y como AE es inconmensurable con EZ, AK es también inconmensurable con EA [VI 1; X 11]. Pero AK es la suma de los (cuadrados) de MN, NE y EA es el (rectángulo) MN, NE; luego la suma de los (cuadrados) de MN, NE es inconmensurable con el (rectángulo) MN, NE. Ahora bien, cada uno de ellos es medial y las (rectas) MN, NE son inconmensurables en cuadrado.

Por consiguiente, ME es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales [X 41] y el lado del cuadrado equivalente a AF. Q. E. D.

[LEMA

Si una línea recta se corta en (partes) desiguales, los cuadrados de las (partes) desiguales son mayores que el doble del rectángulo comprendido por las partes desiguales.

Sea AB la recta y córtese en partes desiguales por el (punto) Γ , y sea $A\Gamma$ la mayor.

Digo que los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB son mayores que el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB .

Divídase AB en dos partes iguales por el (punto) Δ . Pues bien, como una línea recta ha sido cortada en (partes) iguales por el (punto) Δ y en (partes) desiguales por el (punto) Γ , entonces el (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB junto con el (cuadrado) de $\Gamma\Delta$ es igual al (cuadrado) de $A\Delta$ [II 5]; de modo que el (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB es menor que el (cuadrado) de $A\Delta$; luego el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB es menor que el doble del (cuadrado) de $A\Delta$. Pero los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB son el doble de los de $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ [II 9].

Por consiguiente, los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB son mayores que el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB . Q. E. D.] ³⁷.

PROPOSICIÓN 60

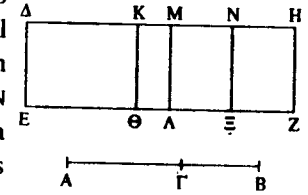
El cuadrado de una binomial aplicado a una recta expresable produce como anchura una primera binomial.

Sea la (recta) binomial AB dividida en sus términos por el (punto) Γ de modo que $A\Gamma$ sea el término mayor; y póngase la (recta) expresable ΔE , y aplíquese a ΔE el (paralelogramo) ΔEZH igual al cuadrado de AB y que produzca la anchura ΔH .

Digo que ΔH es una primera binomial.

³⁷ Heiberg atetiza este lema y considera que es poco verosímil que lo haya intercalado el propio Euclides pues lo ha utilizado tácitamente en X 44.

Pues aplíquese a ΔE el (rectángulo) $\Delta\Theta$ igual al (cuadrado) de $A\Gamma$, y el (rectángulo) $K\Lambda$ igual al (cuadrado) de ΓB ; entonces el resto, el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB es igual a MZ . Divídase la (recta) MH en dos partes iguales por el (punto) N y trácese $N\Xi$ paralela [a cada una de las (rectas) MA , HZ]. Entonces cada uno de los (rectángulos) $M\Xi$,



NZ es igual a una vez el (rectángulo) $A\Gamma$, ΓB . Y como AB es una binomial dividida en sus términos por el (punto) Γ , entonces $A\Gamma$, ΓB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 36]; luego los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB son expresables y conmensurables entre sí; de modo que la suma de los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB es también expresable [X 15]. Y es igual a $\Delta\Lambda$. Entonces $\Delta\Lambda$ es también expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΔE , luego la (recta) ΔM es expresable y conmensurable en longitud con ΔE [X 20]. Puesto que $A\Gamma$, ΓB son a su vez (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, entonces el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB , es decir MZ es medial [X 21]. Y se ha aplicado a la (recta) expresable $M\Lambda$; entonces la (recta) MH es también expresable e inconmensurable en longitud con $M\Lambda$, es decir con ΔE [X 22]. Pero $M\Delta$ es también expresable y conmensurable en longitud con MH [X 13]. Y son expresables; entonces ΔM , MH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego ΔH es binomial [X 36].

Hay que demostrar que también es primera.

Pues como el (rectángulo) $A\Gamma$, ΓB es media proporcional de los (cuadrados de $A\Gamma$, ΓB [Lema después de X 53], entonces $M\Xi$ es también media proporcional de $\Delta\Theta$, $K\Lambda$; por tanto, como $\Delta\Theta$ es a $M\Xi$, así $M\Xi$ a $K\Lambda$, es decir, como ΔK es a MN , así MN a MK [VI 1]; luego el (rectángulo comprendido) por ΔK , KM es

igual al (cuadrado) de MN [VI 17]. Y como el (cuadrado) de AG es conmensurable con el de GB , $\Delta\theta$ es también conmensurable con KA ; de modo que la (recta) ΔK es también conmensurable con la (recta) KM [VI 1; X 11]. Y puesto que los (cuadrados) de AG , GB son mayores que el doble del (rectángulo comprendido) por AG , GB [Lema], entonces $\Delta\lambda$ es también mayor que MZ ; de modo que ΔM es también mayor que MH [VI 1]. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por ΔK , KM es igual al (cuadrado) de MN , es decir a la cuarta parte del (cuadrado) de MH , y ΔK es conmensurable con KM . Pero si hay dos rectas desiguales, y se aplica a la mayor un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de la menor, deficiente en la figura de un cuadrado y la divide en (partes) conmensurables, el cuadrado de la mayor es mayor que el de la menor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (la mayor) [X 17]; entonces el cuadrado de ΔM es mayor que el cuadrado de MH en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (ΔM). Ahora bien, ΔM , MH son rectas expresables, y ΔM que es el término mayor es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada ΔE .

Por consiguiente, ΔH es una primera binomial. Q. E. D.

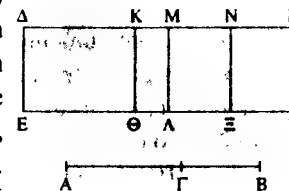
PROPOSICIÓN 61

El cuadrado de una (recta) primera bimedial, aplicado a una recta expresable, produce como anchura una segunda binomial.

Sea AB la (recta) primera bimedial dividida en sus mediales por el punto Γ , de las cuales AG es la mayor; póngase la recta expresable ΔE y aplíquese a ΔE un paralelogramo ΔZ igual al (cuadrado) de AB que produzca la anchura ΔH .

Digo que ΔH es una segunda binomial.

Sígase, pues, la misma construcción de los (teoremas) anteriores, y como AB es una primera bimedial dividida por el punto Γ , entonces AG , GB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) expresable [X 37]; de modo que los (cuadrados) de AG , GB son también mediales [X 21]. Luego $\Delta\lambda$ es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y se ha aplicado a la recta expresable ΔE ; luego $M\lambda$ es expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]. Puesto que el doble del (rectángulo comprendido) por AG , GB es a su vez expresable, MZ es también expresable. Y se ha aplicado a la recta expresable $M\lambda$; luego MH es también expresable y conmensurable en longitud con $M\lambda$, es decir con ΔE [X 20]; entonces ΔM es inconmensurable en longitud con MH [X 13]; y son expresables; así pues, ΔM , MH son rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego ΔH es binomial [X 36].



Hay que demostrar ahora que es también segunda.

Pues como los cuadrados de AG , GB son mayores que el doble del (rectángulo comprendido) por AG , GB , entonces $\Delta\lambda$ es también mayor que MZ ; de modo que ΔM es también (mayor) que MH [VI 1]. Y puesto que el (cuadrado) de AG es conmensurable con el (cuadrado) de GB , $\Delta\theta$ es también conmensurable con KA ; de modo que la (recta) ΔK es también conmensurable con KM [VI 1; X 11]. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por ΔK , KM es igual al (cuadrado) de MN ; por tanto, el cuadrado de ΔM es mayor que el de MH en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (ΔM) [X 17]. Y MH es conmensurable en longitud con ΔE .

Por consiguiente ΔH es una segunda binomial.

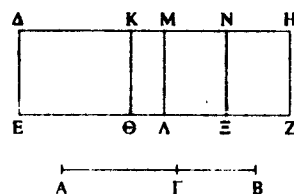
PROPOSICIÓN 62

El cuadrado de una recta segunda bimedial, aplicado a una recta expresable, produce como anchura una tercera binomial.

Sea AB la (recta) segunda bimedial dividida en sus mediales por el (punto) Γ , de modo que $A\Gamma$ sea el segmento mayor; y sea ΔE una (recta) expresable, y aplíquese a ΔE el paralelogramo ΔZ igual al cuadrado de AB que produzca como anchura ΔH .

Digo que ΔH es una tercera binomial.

Sígase la misma construcción que en las demostraciones anteriores. Y como AB es una segunda bimedial dividida por el (punto) Γ , entonces $A\Gamma$, ΓB son



(rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) medial [X 38]; de modo que la suma de los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y es igual a $\Delta\Lambda$; luego $\Delta\Lambda$ es también medial. Y se

ha aplicado a la recta expresable ΔE ; así pues $\Delta\Lambda$ es también expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]. Por lo mismo MH es entonces también expresable e inconmensurable en longitud con $\Delta\Lambda$, es decir con ΔE ; luego cada una de las (rectas) ΔM , MH es también expresable e inconmensurable en longitud con ΔE . Ahora bien, puesto que $A\Gamma$ es inconmensurable en longitud con ΓB , mientras que, como $A\Gamma$ es a ΓB , así el (cuadrado) de $A\Gamma$ al (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB , entonces, el (cuadrado) de $A\Gamma$ es también inconmensurable con el (rectángulo) $A\Gamma$, ΓB [X 11]. De modo que la suma de los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB es también inconmensurable con el doble del

(rectángulo) $A\Gamma$, ΓB [X 12 y 13], es decir, $\Delta\Lambda$ con MZ ; de modo que ΔM es también inconmensurable con MH [VI 1 y X 11]. Y son expresables; por tanto, ΔH es una binomial [X 36].

Hay que demostrar ahora que también es tercera.

De manera semejante a los (teoremas) anteriores concluiríamos que ΔM es mayor que MH , y ΔK es conmensurable con KM . Y el (rectángulo) ΔK , KM es igual al (cuadrado) de MN ; entonces el cuadrado de ΔM es mayor que el de MH en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella [ΔM]. Y ninguna de las (rectas) ΔM , MH es conmensurable en longitud con ΔE .

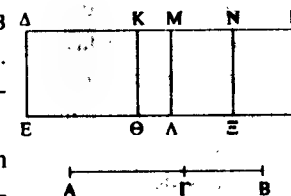
Por consiguiente, ΔH es una tercera binomial [X Seg. Def. 3]. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 63

El cuadrado de una recta «mayor» aplicado a una recta expresable produce como anchura una cuarta binomial.

Sea AB una recta «mayor» dividida por el (punto) Γ de modo que $A\Gamma$ sea mayor que ΓB y (sea) ΔE una (recta) expresable y aplíquese a ΔE el paralelogramo ΔZ igual al cuadrado de AB que produzca como anchura ΔH .

Digo que ΔH es una cuarta binomial.



Sígase la misma construcción que en las demostraciones anteriores. Y como AB es una (recta)

«mayor» dividida por el punto Γ , $A\Gamma$, ΓB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable pero el (rectángulo comprendido) por ellas medial [X 39]. Así pues, como la suma de los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB

es expresable, entonces $\Delta\Lambda$ es expresable; luego ΔM es también expresable y conmensurable en longitud con ΔE [X 20]. Puesto que el doble del rectángulo comprendido por $A\Gamma$, ΓB , es decir MZ , es, a su vez, medial y se ha aplicado a la recta expresable $M\Lambda$, entonces MH es también expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]; luego ΔM es también inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]; luego ΔM es también inconmensurable en longitud con MH [X 13]. Así pues, ΔM , MH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto ΔH es una (recta) binomial [X 36].

Hay que demostrar que es también cuarta.

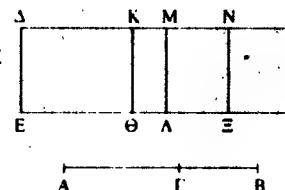
De manera semejante a los (teoremas) anteriores demostraríamos que ΔM es mayor que MH , y que el (rectángulo) ΔK , KM es igual al (cuadrado) de MN . Así pues, como el cuadrado de $A\Gamma$ es inconmensurable con el (cuadrado) de ΓB , entonces $\Delta\Theta$ es inconmensurable con $K\Lambda$; de modo que ΔK es inconmensurable con KM [VI 1; X 11]. Pero si hay dos rectas desiguales y se aplica a la mayor un paralelogramo igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, y la divide en partes inconmensurables, entonces el cuadrado de la mayor será mayor que el de la menor en el (cuadrado) de una recta inconmensurable en longitud con ella (la mayor) [X 18]; luego el cuadrado de ΔM es mayor que el de MH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΔM). Ahora bien, ΔM , MH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y ΔM es conmensurable con la (recta) expresable propuesta ΔE .

Por consiguiente, ΔH es una cuarta binomial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 64

El cuadrado del lado de un área expresable más una medial aplicado a una recta expresable produce como anchura una quinta binomial.

Sea AB el lado del cuadrado equivalente a un área expresable más una medial, dividido en sus rectas por el (punto) Γ , de modo que $A\Gamma$ sea la mayor, y póngase la recta expresable ΔE , y aplíquese a ΔE el paralelogramo ΔZ igual al (cuadrado) de AB que produzca la anchura ΔH .



Digo que ΔH es una quinta binomial.

Sígase la misma construcción que en los (teoremas) anteriores. Pues bien, como AB , el lado del cuadrado equivalente a un área expresable más una medial, ha sido dividido por el (punto) Γ , entonces $A\Gamma$, ΓB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas expresable [X 40]. Así pues, como la suma de los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB es medial, entonces el (área) $\Delta\Lambda$ es medial; de modo que ΔM es una (recta) expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]. Puesto que el doble del (rectángulo) $A\Gamma$, ΓB , es decir MZ , es a su vez expresable, entonces MH es también una (recta) expresable conmensurable con ΔE [X 20]. Luego ΔM es inconmensurable con MH [X 13]; luego ΔM , MH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, por tanto ΔH es una binomial [X 36].

Digo ahora que también es quinta.

Pues de manera semejante demostraríamos que el (rectángulo-

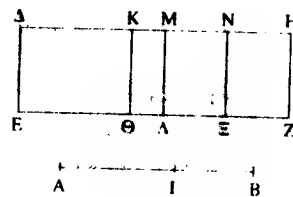
lo) ΔK , KM es igual al (cuadrado) de MN , y que ΔK es inconmensurable en longitud con KM ; entonces el cuadrado de ΔM es mayor que el de MH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella [X 18]. Y ΔM , MH son conmensurables sólo en cuadrado, y la menor MH es conmensurable en longitud con ΔE .

Por consiguiente, ΔH es una quinta binomial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 65

El cuadrado del lado de la (suma de) dos (áreas) mediales, aplicado a una recta expresable produce como anchura una sexta binomial.

Sea AB el lado del cuadrado equivalente a la (suma de) dos áreas mediales, dividido por el (punto) Γ , y sea ΔE una (recta) expresable, y aplíquese a ΔE el (paralelogramo) ΔZ igual al cuadrado de AB , que produzca la anchura ΔH .



Digo que ΔH es una sexta binomial.

Sígase pues la misma construcción que en los (teoremas) anteriores. Y como AB , el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales, se ha dividido por el (punto) Γ , entonces $A\Gamma$, ΓB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial, el (rectángulo comprendido) por ellas también medial, y además la suma de sus cuadrados inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ellas [X 41]; de modo que, según las demostraciones anteriores, cada uno de los (rectángulos) ΔA , MZ es medial. Y se han aplicado a la (recta) expresable ΔE ; así pues, cada una

de las (rectas) ΔM , MH es expresable e inconmensurable en longitud con ΔE [X 22]. Ahora bien, puesto que la suma de los (cuadrados) de $A\Gamma$, ΓB es inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por $A\Gamma$, ΓB , entonces ΔA es inconmensurable con MZ . Luego ΔM es inconmensurable con MH [VI 1; X 11]; entonces ΔM , MH son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, ΔH es una (recta) binomial [X 36].

Digo ahora que también es sexta.

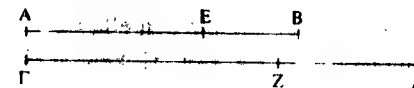
Pues de manera semejante demostraríamos a su vez que el (rectángulo) ΔK , KM es igual al (cuadrado) de MN , y que ΔK es inconmensurable en longitud con KM ; y por lo mismo, entonces, el cuadrado de ΔM es mayor que el de MH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (ΔM). Ahora bien, ninguna de las (rectas) ΔM , MH es conmensurable en longitud con la recta propuesta ΔE .

Por consiguiente, ΔH es una sexta binomial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 66

Una recta conmensurable en longitud con una binomial es también ella misma binomial y del mismo orden.

Sea AB la recta binomial y sea $\Gamma\Delta$ conmensurable en longitud con AB .



Digo que $\Gamma\Delta$ es binomial y del mismo orden que AB .

Pues como AB es binomial, divídase en sus términos por el (punto) E , y sea AE el término mayor; entonces AE , EB son

(rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 36]. Hágase de forma que como AB es a $\Gamma\Delta$, así AE a ΓZ [VI 12]; entonces la (recta) restante EB es a la (recta) restante Z Δ , como AB es a $\Gamma\Delta$ [V 19]. Pero AB es conmensurable en longitud con $\Gamma\Delta$; luego AE es conmensurable también con ΓZ y EB con Z Δ [X 11]. Ahora bien, AE, EB son expresables; luego ΓZ , Z Δ son también expresables. Y como AE es a ΓZ , EB a Z Δ [V 11]. Entonces, por alternancia, como AE es a EB, ΓZ a Z Δ [V 16]. Pero AE, EB son conmensurables sólo en cuadrado; entonces ΓZ , Z Δ son conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Y son expresables; por tanto $\Gamma\Delta$ es una binomial [X 36].

Digo además que es del mismo orden que AB.

Pues el cuadrado de AE es mayor que el de EB o bien en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con (AE) o en el de una inconmensurable con ella. Pues bien, si el cuadrado de AE es mayor que el de EB en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (AE), también el cuadrado de ΓZ será mayor que el de Z Δ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΓZ). Y si AE es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, también ΓZ será conmensurable con ella [X 12], por eso, también, cada una de las (rectas) AB, $\Gamma\Delta$ es primera binomial, es decir, son del mismo orden. Pero si EB es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, Z Δ es también conmensurable con ella [X 12], por eso ($\Gamma\Delta$) será del mismo orden que AB: porque cada una de ellas será una segunda binomial [X Seg. Def. 2]. Pero si ninguna de las (rectas) AE, EB es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, ninguna de las (rectas) ΓZ , Z Δ será conmensurable con ella [X 13] y cada una será tercera (binomial) [X Seg. Def. 3]. Pero si el cuadrado de AE es mayor que el de EB en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AE), también el cuadrado de ΓZ es mayor que el de Z Δ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΓZ) [X 14]. Y si AE es conmensurable con la

(recta) expresable propuesta, ΓZ es también conmensurable con ella; y cada una de ellas es cuarta (binomial) [X Seg. Def. 4]. Pero si (lo es) EB, también (lo es) Z Δ , y cada una de ellas será quinta (binomial) [X Seg. Def. 5]. Y si ninguna de las (rectas) AE, EB es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, tampoco lo es ninguna de las (rectas) ΓZ , Z Δ y cada una de ellas será sexta (binomial) [X Seg. Def. 6].

De modo que una (recta) conmensurable en longitud con una binomial es también ella misma binomial y del mismo orden. Q. E. D.

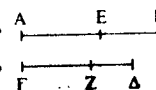
PROPOSICIÓN 67

La recta conmensurable en longitud con una bimedial es también ella misma bimedial y del mismo orden.

Sea AB una bimedial y sea $\Gamma\Delta$ conmensurable en longitud con ella.

Digo que $\Gamma\Delta$ es bimedial y del mismo orden que AB.

Pues como AB es una bimedial, divídase en sus mediales por el (punto) E; entonces AE, EB son rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado [X 37 y 38]. Hágase de forma que como AB es a $\Gamma\Delta$, AE a ΓZ ; entonces la (recta) restante EB es a la (recta) restante Z Δ , como AB es a $\Gamma\Delta$ [V 19]. Pero AB es conmensurable en longitud con $\Gamma\Delta$; entonces AE, EB son conmensurables respectivamente con ΓZ , Z Δ [X 11]. Pero AE, EB son mediales; luego ΓZ , Z Δ son también mediales [X 23]. Y dado que, como AE es a EB, ΓZ a Z Δ [V 11], mientras que AE, EB son conmensurables sólo en cuadrado, [entonces] ΓZ , Z Δ son conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Pero se ha demostrado también que son mediales; por tanto $\Gamma\Delta$ es bimedial.



Digo ahora que también es del mismo orden que AB.

Pues dado que, como AE es a EB, ΓZ a $Z\Delta$, entonces, como el (cuadrado) de AE es al (rectángulo) AEB, así el (cuadrado) de ΓZ es al (rectángulo) $\Gamma Z\Delta$; por alternancia, como el (cuadrado) de AE es al (cuadrado) de ΓZ , así el (rectángulo) AEB al (rectángulo) $\Gamma Z\Delta$ [V 16]. Y el (cuadrado) de AE es conmensurable con el de ΓZ ; luego el (rectángulo) AEB también es conmensurable con el (rectángulo) $\Gamma Z\Delta$. Así pues, si el (rectángulo) AEB es expresable, el (rectángulo) $\Gamma Z\Delta$ es también expresable [y por eso $\Gamma\Delta$ es primera bimedial] [X 37]. Pero si es medial, medial [X 23 Por.] y cada una de ellas AB, $\Gamma\Delta$ es segunda [X 38].

Por eso $\Gamma\Delta$ es del mismo orden que AB. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 68

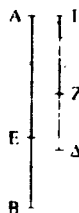
Una (recta) conmensurable con una (recta) «mayor» es también «mayor»

Sea AB la recta «mayor», y sea $\Gamma\Delta$ conmensurable con AB.

Digo que $\Gamma\Delta$ es «mayor».

Divídase AB por el (punto) E; entonces AE, EB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable, pero el (rectángulo comprendido) por ellas medial [X 39]; hágase de la misma forma que en los (teoremas) anteriores. Dado que, como AB es a $\Gamma\Delta$, así AE a ΓZ y EB a $Z\Delta$, entonces, como AE es a ΓZ , así también EB a $Z\Delta$ [V 11]. Pero AB es conmensurable con $\Gamma\Delta$; luego AE, EB son conmensurables respectivamente con ΓZ , $Z\Delta$ [V 11].

Ahora bien, dado que, como AE es a ΓZ , así EB a $Z\Delta$, y por alternancia, como AE es a EB, así ΓZ a $Z\Delta$ [V 16], entonces, por composición, como AB es a BE, así $\Gamma\Delta$ a ΔZ [V 18];



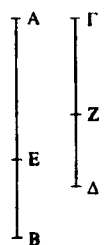
luego como el (cuadrado) de AB es al (cuadrado) de BE, así el (cuadrado) de $\Gamma\Delta$ al (cuadrado) de ΔZ [VI 20]. De manera semejante demostraríamos que como el (cuadrado) de AB es al (cuadrado) de AE, así el (cuadrado) de $\Gamma\Delta$ al (cuadrado) de ΓZ . Entonces, como el (cuadrado) de AB es a los (cuadrados) de AE, EB, así el (cuadrado) de $\Gamma\Delta$ a los (cuadrados) de ΓZ , $Z\Delta$. Luego, por alternancia, como el (cuadrado) de AB es al (cuadrado) de $\Gamma\Delta$, así los (cuadrados) de AE, EB a los (cuadrados) de ΓZ , $Z\Delta$ [V 16]. Pero el (cuadrado) de AB es conmensurable con el cuadrado de $\Gamma\Delta$; entonces los (cuadrados) de AE, EB son también conmensurables con los (cuadrados) de ΓZ , $Z\Delta$. Y los cuadrados de AE, EB juntos son expresables, (entonces) los (cuadrados) de ΓZ , $Z\Delta$ juntos son también expresables. Pero, de manera semejante, el doble del (rectángulo comprendido) por AE, EB es también conmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por ΓZ , $Z\Delta$. Y el doble del (rectángulo comprendido) por AE, EB es medial; entonces, el doble del (rectángulo comprendido) por ΓZ , $Z\Delta$ es medial [X 23 Por.]. Luego ΓZ , $Z\Delta$ son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable, pero el doble del (rectángulo comprendido) por ellas medial. Por tanto, la recta entera $\Gamma\Delta$ es la (recta) no expresable llamada «mayor» [X 39].

Por consiguiente, una (recta) conmensurable con una «mayor» es «mayor». Q. E. D.

PROPOSICIÓN 69

Una recta conmensurable con el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial es ella misma también el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial.

Sea AB el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial y sea $\Gamma\Delta$ conmensurable con AB.



Hay que demostrar que $\Gamma\Delta$ es también el lado del cuadrado equivalente a un (área) medial más una expresable.

Divídase AB en sus rectas por el (punto) E; entonces AE, EB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el rectángulo comprendido por ellas expresable [X 40]; sígase la misma construcción que en los (teoremas) anteriores. De manera semejante demostraríamos que ΓZ , $Z\Delta$ son inconmensurables en cuadrado y que la suma de los (cuadrados) de AE, EB es conmensurable con la suma de los (cuadrados) de ΓZ , $Z\Delta$ y el (rectángulo comprendido) por AE, EB con el (rectángulo comprendido) por ΓZ , $Z\Delta$; de modo que la suma de los (cuadrados) de ΓZ , $Z\Delta$ es medial y el (rectángulo comprendido) por ΓZ , $Z\Delta$ expresable.

Por consiguiente, $\Gamma\Delta$ es el lado del cuadrado equivalente a un (área) medial más una expresable. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 70

Una (recta) conmensurable con el lado del cuadrado equivalente a la suma dos (áreas) mediales es también ella misma el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales.

Sea AB el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales y sea $\Gamma\Delta$ conmensurable con AB.

Hay que demostrar que $\Gamma\Delta$ es también el lado del cuadrado equivalente a la suma dos (áreas) mediales.

Pues como AB es el lado del cuadrado equivalente a la

suma de dos (áreas) mediales, divídase en sus rectas por E; entonces AE, EB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus (cuadrados) medial y el (rectángulo comprendido) por ellas también medial y además la suma de los cuadrados de AE, EB inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AE, EB [X 41]; sígase la misma construcción que en los (teoremas) anteriores. De manera semejante demostraríamos que ΓZ , $Z\Delta$ son inconmensurables en cuadrado y que la suma de los (cuadrados) de AE, EB es conmensurable con la suma de los (cuadrados) de ΓZ , $Z\Delta$ y el (rectángulo comprendido) por AE, EB con el (rectángulo comprendido) por ΓZ , $Z\Delta$; de modo que la suma de los cuadrados de ΓZ , $Z\Delta$ es medial y el (rectángulo comprendido) por ΓZ , $Z\Delta$ es también medial y además la suma de los cuadrados de ΓZ , $Z\Delta$ es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ΓZ , $Z\Delta$.

Por consiguiente, $\Gamma\Delta$ es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales. Q. E. D.



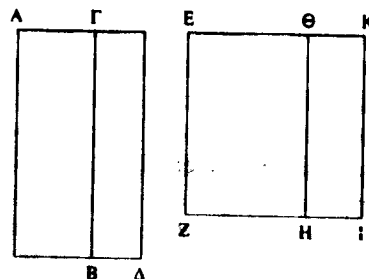
PROPOSICIÓN 71

Si se suman un (área) expresable y una medial resultan cuatro (tipos de rectas) no expresables: o una binomial o una primera bimedial o una «mayor» o el lado del cuadrado equivalente a un (área) medial más una expresable.

Sea AB el (área) expresable y $\Gamma\Delta$ la medial.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AΔ es o binomial o primera bimedial o «mayor» o el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial.

Pues AB o es mayor que $\Gamma\Delta$ o es menor. Sea en primer lugar mayor; y póngase la (recta) expresable EZ , y aplíquese a EZ el

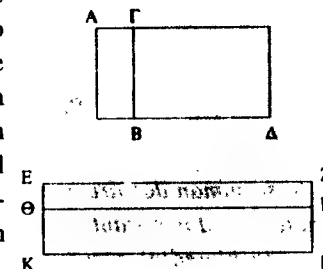


rectángulo EH igual a AB que produzca la anchura $E\Theta$; y aplíquese a EZ el rectángulo ΘI igual a $\Delta\Gamma$ que produzca la anchura ΘK . Y puesto que AB es expresable y es igual a EH , entonces EH es también expresable y se ha aplicado a EZ produciendo la anchura $E\Theta$; luego $E\Theta$ es expresable y conmensurable en longitud con EZ [X 20]. Puesto que $\Gamma\Delta$ es, a su vez, medial y es igual a ΘI , entonces ΘI es también medial. Y se ha aplicado a la recta expresable EZ produciendo la anchura ΘK ; luego ΘK es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Y como $\Gamma\Delta$ es medial, mientras que AB es expresable, entonces AB es inconmensurable con $\Gamma\Delta$; de modo que EH es inconmensurable con ΘI . Pero como EH es a ΘI , así $E\Theta$ a ΘK [VI 1]; luego $E\Theta$ es inconmensurable en longitud con ΘK [X 11]. Y ambas son expresables; entonces $E\Theta$, ΘK son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego EK es una (recta) binomial dividida por el (punto) Θ [X 36]. Y puesto que AB es mayor que $\Gamma\Delta$, mientras que AB es igual a EH , y $\Gamma\Delta$ (es igual) a ΘI , entonces EH es también mayor que ΘI ; luego $E\Theta$ es también mayor que ΘK . Pues bien, el cuadrado de $E\Theta$ es mayor que el de ΘK o bien en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ($E\Theta$) o bien en el de una (recta) inconmensurable con ella.

En primer lugar, sea mayor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΘE); ahora bien, la mayor, ΘE , es conmensurable con la recta propuesta EZ ; entonces EK es una (recta) primera binomial [X Seg. Def. 1]. Y EZ es expresable; pero si un área es comprendida por una (recta) expresable y una primera binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es una binomial [X 54]. Así pues, el lado del cuadrado equivalente a EI es binomial; de modo que el lado del cuadrado equivalente a $A\Delta$ es también binomial.

Pero ahora sea el cuadrado de $E\Theta$ mayor que el de ΘK en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella ($E\Theta$). Ahora bien, la mayor $E\Theta$ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta EZ ; entonces EK es una cuarta binomial [X Seg. Def. 4]. Pero EZ es expresable; y si un área está comprendida por una (recta) expresable y una cuarta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es la recta no expresable llamada «mayor» [X 57]. Así pues el lado del cuadrado equivalente al área EI es una recta «mayor»; de modo que también el lado del cuadrado equivalente a $A\Delta$ es «mayor».

Pero sea ahora AB menor que $\Gamma\Delta$; entonces EH es menor que ΘI ; de modo que $E\Theta$ es también menor que ΘK . Pero el cuadrado de ΘK es mayor que el de $E\Theta$ o bien en el cuadrado de una (recta) conmensurable con (ΘK) o bien en el de una inconmensurable con ella. En primer lugar sea mayor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella; ahora bien, la menor, $E\Theta$, es conmensurable en longitud con la recta propuesta EZ ; entonces EK es una segunda binomial [X Seg. Def. 2]. Pero EZ es expresable; y si un área está



comprendida por una (recta) expresable y una segunda binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es una primera bimedial [X 55]; así pues, el lado del cuadrado equivalente al área EI es una primera bimedial, de modo que el lado del cuadrado equivalente al área AA es también una primera bimedial.

Pero ahora sea el cuadrado de ΘK mayor que el de ΘE en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΘK). Ahora bien, la recta menor $E\Theta$ es conmensurable con la (recta) expresable propuesta EZ; entonces EK es una quinta binomial [X Seg. Def. 5]. Pero EZ es expresable; y si un área está comprendida por una (recta) expresable y una quinta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial [X 58]. Por tanto, el lado del cuadrado equivalente al área EI es el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial; de modo que el lado del cuadrado equivalente a AA es el lado del cuadrado equivalente a un área expresable más una medial.

Por consiguiente, si se suman un área expresable y una medial, se producen cuatro (tipos de) rectas no expresables: o una binomial o una primera bimedial o una «mayor» o el lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 72

Si se suman dos áreas mediales inconmensurables entre sí, resultan los dos restantes (tipos de) rectas no expresables: o la segunda bimedial o el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales.

Súmense pues las dos (áreas) mediales inconmensurables entre sí AB, $\Gamma\Delta$.

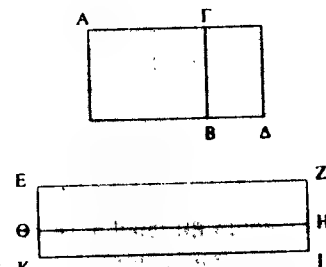
Digo que el lado del cuadrado igual a AA o es una segunda bimedial o es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

Pues AB o es mayor o es menor que $\Gamma\Delta$. Sea AB, si se da el caso, en primer lugar, mayor que $\Gamma\Delta$; y póngase la recta expresable EZ, y aplíquese a EZ el

rectángulo EH igual a AB que produzca la anchura E Θ , y el (rectángulo) ΘI igual a $\Gamma\Delta$ que produzca la anchura ΘK . Y

puesto que cada una de las (áreas) AB, $\Gamma\Delta$ es medial, entonces cada una de las (áreas) EH, ΘI es también medial. Y se han aplicado a la (recta) expresable ZE produciendo las anchuras E Θ , ΘK ; así pues, cada una de las (rectas) E Θ , ΘK es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Y puesto que AB es inconmensurable con $\Gamma\Delta$, y AB es igual a EH, y $\Gamma\Delta$ a ΘI , entonces EH es también inconmensurable con ΘI . Pero como EH es a ΘI , así E Θ es a ΘK [VI 1]; entonces E Θ es inconmensurable en longitud con ΘK [X 11]. Así pues E Θ , ΘK son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego EK es binomial [X 36]. Pero el cuadrado de E Θ es mayor que el de ΘK o bien en el cuadrado de una (recta) conmensurable con (ΘK) o bien en el de una inconmensurable con ella.

Sea mayor el cuadrado (de ΘK), en primer lugar, en el cuadrado de una recta conmensurable en longitud con ella (ΘK). Ahora bien, ninguna de las (rectas) E Θ , ΘK es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta EZ; entonces EK es una tercera binomial [X Seg. Def. 3]. Pero EZ es expresable; y si un área está comprendida por una (recta) expresable y una tercera binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es



una segunda bimedial [X 56]; luego el lado de EI, es decir de AA es una segunda bimedial.

Pero ahora sea el cuadrado de EΘ mayor que el de ΘK en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (EΘ); ahora bien, cada una de las (rectas) EΘ, ΘK es inconmensurable en longitud con EZ; luego EK es una sexta binomial [X Seg. Def. 6]. Pero si un área está comprendida por una (recta) expresable y una sexta binomial, el lado del cuadrado equivalente al área es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales [X 59]; de modo que el lado del cuadrado equivalente al área AA es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales.

Por consiguiente, si se suman dos áreas mediales inconmensurables entre sí, resultan los dos restantes (tipos de) rectas no expresables: o la segunda bimedial o el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

Las (rectas) binomiales y las no expresables siguientes no son las mismas que una medial y difieren entre sí. Pues el cuadrado de una medial aplicado a una recta expresable produce como anchura una recta expresable e inconmensurable en longitud con aquella a la que se ha aplicado [X 22]. Mientras que el (cuadrado) de la binomial aplicado a una recta expresable produce como anchura la primera binomial [X 60]. Y el cuadrado de la primera binomial aplicado a una (recta) expresable produce como anchura la segunda binomial [X 61]. Pero el cuadrado de una segunda bimedial aplicado a una (recta) expresable produce como anchura la tercera binomial [X 62]. Y el cuadrado de una «mayor» aplicado a una (recta) expresable produce como anchura la cuarta binomial [X 63]. Mientras que el cuadrado del lado equivalente a un área expresable más una medial aplicado a una (recta) expresable produce como anchura la quinta binomial [X 64]. Pero

el cuadrado del lado del cuadrado equivalente a la suma de dos (áreas) mediales aplicado a una (recta) expresable produce como anchura la sexta binomial [X 65]. Dichas anchuras son diferentes de la primera y entre sí; de la primera porque es expresable, y entre sí porque no son del mismo orden. De modo que las propias (rectas) no expresables también son diferentes entre sí.

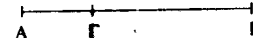
PROPOSICIÓN 73

Si se quita de una (recta) expresable otra recta expresable que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera, la (recta) restante no es expresable; llámese apótoma.

Quítese, pues, de la (recta) expresable AB, la recta expresable BΓ que es conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera.

Digo que la (recta) restante AΓ es la recta no expresable llamada apótoma.

Pues como AB es inconmensurable en longitud con BΓ, y como AB es a BΓ, así el (cuadrado) de AB al (rectángulo comprendido) por AB, BΓ, entonces, el (cuadrado) de AB es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 11]. Pero los (cuadrados) de AB, BΓ son conmensurables con el (cuadrado) de AB [X 15], y el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es conmensurable con el (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [X 6]. Y puesto que los (cuadrados) de AB, BΓ son iguales al doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ junto con el cuadrado de ΓA [II 7], entonces los cuadrados de AB, BΓ son inconmensurables también con el resto, el cuadrado de AΓ [X 13, 16]. Pero los cua-



drados de AB , $B\Gamma$ son expresables; por tanto, $A\Gamma$ no es expresable; llámesele apótoma. Q. E. D. ³⁸.

PROPOSICIÓN 74

Si de una (recta) medial se quita otra medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la recta (entera) y que comprenda junto con la recta entera un (rectángulo) expresable, la (recta) restante no es expresable; llámesele primera apótoma de una medial.

Quítese, pues, de la (recta) medial AB la (recta) medial $B\Gamma$ que es conmensurable sólo en cuadrado con AB y produce junto con AB el (rectángulo) expresable (comprendido) por AB , $B\Gamma$.

Digo que la (recta) restante $A\Gamma$ no es expresable; llámesele primera apótoma de una medial.

Pues como AB , $B\Gamma$ son mediales, los cuadrados de AB , $B\Gamma$ son también mediales. Pero el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ es expresable; entonces los cuadrados de AB , $B\Gamma$ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$; luego el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ es inconmensurable con el resto, el cuadrado de $A\Gamma$ [II 7]; puesto que, si una magnitud total es inconmensurable con una de

³⁸ Euclides continúa ahora, dentro de la clasificación general, con aquellas rectas que son producidas por la diferencia de dos rectas expresables inconmensurables.

Taisbak relaciona el nombre de «apótoma» con el lado del decágono regular, que resulta de la diferencia de los mismos lados de cuadrados que, sumados, producen el diámetro del círculo. Cf. nota 28.

las (magnitudes parciales), también las magnitudes iniciales serán inconmensurables [X 16]. Pero el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ es expresable; luego el cuadrado de $A\Gamma$ no es expresable; por consiguiente $A\Gamma$ no es expresable; llámesele primera apótoma de una medial.

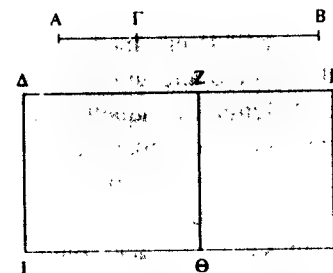
PROPOSICIÓN 75

Si de una (recta) medial se quita otra medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y que comprenda con la recta entera un rectángulo medial, la recta restante no es expresable; llámesele segunda apótoma de una medial.

Quítese, pues, de la (recta) medial AB , la (recta) $B\Gamma$ que es conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera AB y comprende con la (recta) entera AB el (rectángulo) medial AB , $B\Gamma$ [X 28].

Digo que la (recta) restante $A\Gamma$ no es expresable; llámesele segunda apótoma de una medial.

Póngase, pues, la recta expresable ΔI y aplíquese a ΔI un (paralelogramo) ΔE igual a los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ que produzca la anchura ΔH y aplíquese a ΓI el (paralelogramo) $\Delta \Theta$ igual al doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ que produzca la anchura ΔZ ; entonces el resto ZE es igual al (cuadrado) de $A\Gamma$ [II 7]; ahora bien, puesto que los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ son mediales y conmensurables, entonces ΔE es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y se ha apli-



cado a la recta expresable ΔI produciendo la anchura ΔH . Por tanto ΔH es expresable e incommensurable en longitud con ΔI [X 22]. Puesto que el (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ es, a su vez, medial, entonces el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ es también medial [X 23 Por.]. Y es igual a $\Delta\Theta$; luego $\Delta\Theta$ es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΔI produciendo la anchura ΔZ ; así pues, ΔZ es expresable e incommensurable en longitud con ΔI [X 22]. Y puesto que AB es commensurable sólo en cuadrado con $B\Gamma$, entonces AB es incommensurable en longitud con $B\Gamma$; luego el cuadrado de AB es también incommensurable con el (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ [X 11]. Pero los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ son commensurables con el (cuadrado) de AB [X 15], y el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ es commensurable con el (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ [X 6]; entonces el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ es incommensurable con los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ [X 13]. Pero ΔE es igual a los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$, mientras que $\Delta\Theta$ es (igual) al doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$; entonces ΔE es incommensurable con $\Delta\Theta$. Pero como ΔE es a $\Delta\Theta$, así $H\Delta$ a ΔZ [VI 1]; así pues $H\Delta$ es incommensurable con ΔZ [X 11]. Y ambas son expresables; entonces $H\Delta$, ΔZ son (rectas) expresables commensurables sólo en cuadrado; luego ZH es apótoma [X 73]. Pero ΔI es expresable; y el (rectángulo comprendido) por una (recta) expresable y una no expresable no es expresable [Deducción a partir de X 20], y el lado del cuadrado equivalente no es expresable. Ahora bien, $A\Gamma$ es el lado del cuadrado equivalente a ZE ; por consiguiente, $A\Gamma$ no es expresable; llámesela segunda apótoma de una medial. Q. E. D.

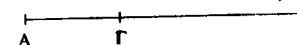
PROPOSICIÓN 76

Si de una recta se quita otra recta que sea incommensurable en cuadrado con la (recta) entera y haga con la (recta) entera la suma de sus cuadrados expresable y el (rectángulo comprendido) por ellas medial, la recta restante no es expresable; llámesela «menor».

Quítese de la recta AB la recta $B\Gamma$ que es incommensurable en cuadrado con la recta entera y cumple las (condiciones) antedichas [X 33].

Digo que la (recta) restante $A\Gamma$ es la (recta) no expresable llamada «menor».

Pues como la suma de los cuadrados de AB , $B\Gamma$ es expresable, y el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ medial, entonces los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ son incommensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$; y por conversión los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ son incommensurables con el resto, el cuadrado de $A\Gamma$ [II 7 y X 16]. Pero los (cuadrados) de AB , $B\Gamma$ son expresables, luego el (cuadrado) de $A\Gamma$ no es expresable; por consiguiente, $A\Gamma$ no es expresable; llámesela «menor». Q. E. D.



PROPOSICIÓN 77

Si de una recta se quita otra recta que sea incommensurable en cuadrado con la (recta) entera, y que haga, con la recta entera, la suma de sus cuadrados medial, pero el doble del (rectángulo comprendido) por ellas expresable, la recta res-

tante no es expresable; llámesela la que hace con un área expresable un área entera medial.

Quítese, pues, de la recta AB la recta BΓ que es inconmensurable en cuadrado con AB y cumple las (condiciones) antedichas [X 34].

Digo que la (recta) restante AΓ es la mencionada recta no expresable.

Pues como la suma de los cuadrados de AB, BΓ es medial, y el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ expresable, entonces los (cuadrados) de AB, BΓ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ; luego el resto, el (cuadrado) de AΓ es inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ [II 7 y X 16]. Ahora bien, el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es expresable; así pues el cuadrado de AΓ no es expresable; por consiguiente AΓ no es expresable; llámesela la que hace con un área expresable un área entera medial. Q. E. D.

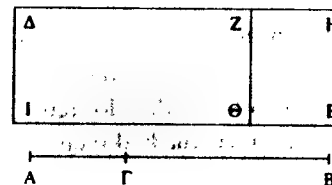
PROPOSICIÓN 78

Si de una recta se quita otra recta que sea inconmensurable en cuadrado con la (recta) entera y que haga junto con la (recta) entera la suma de sus cuadrados medial y el doble del (rectángulo comprendido) por ellas medial y además sus cuadrados inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por ellas, entonces la recta restante no es expresable; llámesela la que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Quítese, pues, de la recta AB la (recta) BΓ que sea inconmensurable en cuadrado con AB y que cumpla las condiciones antedichas [X 35].

Digo que la (recta) restante AΓ es la (recta) no expresable llamada la que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Póngase, pues, la (recta) expresable ΔI y aplíquese a ΔI el (rectángulo) ΔE igual a los (cuadrados) de AB, BΓ que produzca la anchura ΔH, y quítese ΔΘ igual al doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ. Entonces el (rectángulo) restante ZE es igual al (cuadrado) de AΓ [II 7]; de modo que AΓ es el lado del



cuadrado equivalente a ZE. Ahora bien, puesto que la suma de los cuadrados de AB, BΓ es medial y es igual a ΔE, entonces ΔE es medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ΔI produciendo la anchura ΔH; luego ΔH es expresable e inconmensurable en longitud con ΔI [X 22]. Puesto que el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ es, a su vez, medial y es igual a ΔΘ, entonces ΔΘ es medial; y se ha aplicado a la (recta) expresable ΔI produciendo la anchura ΔZ; luego ΔZ es también expresable e inconmensurable en longitud con ΔI [X 22]. Y como los cuadrados de AB, BΓ son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AB, BΓ, entonces ΔE es también inconmensurable con ΔΘ. Pero como ΔE es a ΔΘ, así ΔH a ΔZ [VI 1]; luego ΔH es inconmensurable con ΔZ [X 11]. Y ambas son expresables, entonces ΔH, ΔZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Luego ZH es apótoma [X 73]. Y ZΘ es expresable. Pero el rectángulo comprendido por una (recta) expresable y una apótoma no es expresable [Deducción de X 20] y el lado del cuadrado equi-

valente a él no es expresable; ahora bien, AF es el lado del cuadrado equivalente a ZE ; por consiguiente, AF no es expresable; llámesela la que hace con un (área) medial un (área) entera medial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 79

A una apótoma únicamente se le adjunta una (recta) expresable que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera.

Sea AB la apótoma y BF la adjunta a ella; entonces AF , FB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73].

Δ Digo que no se adjunta a AB ninguna otra (recta) expresable que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera.

B Pues, si es posible, adjúntese BA ; entonces AA , ΔB son también (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73]. Y como aquello en lo que exceden los (cuadrados) de AA , ΔB al doble del (rectángulo comprendido) por AA , ΔB en eso exceden también los

Γ (cuadrados) de AF , FB al doble del (rectángulo comprendido) por AF , FB , porque ambos exceden en lo mismo al (cuadrado) de AB [II 7]; entonces, por alternancia, aquello en lo que exceden los (cuadrados) de AA , ΔB a los (cuadrados) de AF , FB , en eso excede el doble del (rectángulo comprendido) por AA , ΔB al doble del (rectángulo comprendido) por AF , FB . Pero los (cuadrados) de AA , ΔB exceden a los (cuadrados) de AF , FB en un (área) expresable, porque ambos son expresables. Así pues, el doble del (rectángulo comprendido) por AA , ΔB excede al doble del (rectángulo comprendido) por AF , FB en un

(área) expresable; lo cual es imposible, porque ambas son áreas mediales [X 21], y un (área) medial no excede a un (área) medial en un (área) expresable [X 26]. Por tanto, no se adjunta a AB otra (recta) expresable que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera.

Por consiguiente, a una apótoma únicamente se le adjunta una (recta) expresable que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 80

A una primera apótoma de una medial se le adjunta únicamente una (recta) medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y que comprenda junto con la (recta) entera un (rectángulo) expresable.

Sea, pues, AB la primera apótoma de una medial y adjúntese a AB la (recta) BF ; entonces AF , FB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden el rectángulo expresable AF , FB [X 74].

Digo que no se añade a AB ninguna otra recta medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y que comprenda junto con la (recta) entera un (rectángulo) expresable.

Pues, si es posible, adáptese también ΔB ; entonces AA , ΔB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden el (rectángulo) expresable AA , ΔB [X 74]. Y como aquello en lo que exceden los (cuadrados) de AA , ΔB al doble del (rectángulo comprendido) por AA , ΔB , en eso exceden también los (cuadrados) de AF , FB al doble del (rectángulo comprendido) por AF , FB , porque exceden en lo mismo, en el (cuadrado) de AB [II 7]; en



por alternancia, aquello en lo que exceden los (cuadrados) de AA , ΔB a los (cuadrados) de AG , ΓB , en eso excede también el doble del (rectángulo comprendido) por AA , ΔB al doble del (rectángulo comprendido) por AG , ΓB . Pero el doble del (rectángulo comprendido) por AG , ΓB excede al doble del (rectángulo comprendido) por AG , ΓB en un área expresable, porque ambos son expresables; así pues, los (cuadrados) de AA , ΔB exceden a los (cuadrados) de AG , ΓB en un (área) expresable; lo cual es imposible, porque ambos son mediales y un área medial no excede a un (área) medial en un (área) expresable [X 26].

Por consiguiente, a la primera apótomas de una medial se le adjunta únicamente una recta medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y comprenda con la (recta) entera un (rectángulo) expresable. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 81

A la segunda apótomas de una medial se le adjunta únicamente una (recta) medial conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera que comprenda con la (recta) entera un (rectángulo) medial.

Sea AB la segunda apótomas de una medial y BF la adjunta a AB ; entonces AG , ΓB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden el (rectángulo) medial AG , ΓB [X 75].

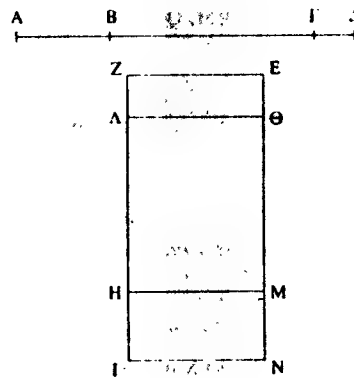
Digo que no se adjuntará a AB ninguna otra (recta) medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y comprenda con la (recta) entera un (rectángulo) medial.

Pues, si es posible, adjúntese BD ; entonces AA , ΔB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que com-

prenden el (rectángulo) medial AA , ΔB [X 75]; póngase la (recta) expresable EZ , y aplíquese a EZ el (rectángulo) EH igual a los (cuadrados) de

AG , ΓB que produzca la anchura EM ; y quítese el (rectángulo) ΘH igual al doble del (rectángulo comprendido) por AG , ΓB que produzca la anchura ΘM ; entonces el resto EA es igual al cuadrado de AB [II 7]; de modo que AB es el lado del cuadrado equivalente a EA .

Pues aplíquese, a su vez, a EZ el (área) EI igual a los (cuadrados) de AA , ΔB que produzca la anchura EN ; pero EA es también igual al (cuadrado) de AB ; entonces el (área) restante ΘI es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AA , ΔB [II 7]. Ahora bien, dado que AG , ΓB son mediales, entonces los (cuadrados) de AG , ΓB son también mediales; y son iguales a EH ; así pues, EH es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y se ha aplicado a la (recta) expresable EZ produciendo la anchura EM ; luego EM es una (recta) expresable inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Puesto que el (rectángulo comprendido) por AG , ΓB es, a su vez, medial, el doble del (rectángulo comprendido) por AG , ΓB es también medial [X 23 Por.]. Y es igual a ΘH ; entonces ΘH es también medial. Ahora bien, se ha aplicado a la (recta) expresable EZ produciendo la anchura ΘM ; luego ΘM es también expresable inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Y como AG , ΓB son conmensurables sólo en cuadrado, entonces AG es inconmensurable en longitud con ΓB . Pero, como AG es a ΓB , así el (cuadrado) de AG al (rectángulo comprendido) por AG , ΓB ; en-



tonces el (cuadrado) de AG es inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AG , GB [X 11]. Ahora bien, los (cuadrados) de AG , GB son conmensurables con el cuadrado de AG , mientras que el (rectángulo comprendido) por AG , GB es conmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por AG , GB [X 6]; luego los (cuadrados de AG , GB son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AG , GB [X 13]. Y EH es igual a los cuadrados de AG , GB , mientras que HA es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AG , GB ; así pues, EH es inconmensurable con ΘH . Pero como EH es a ΘH , así EM a ΘM [VI 1]; entonces EM es inconmensurable en longitud con $M\Theta$ [X 11]; y ambas son expresables; luego EM , $M\Theta$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, $E\Theta$ es una apótoma y ΘM la adjunta a ella [X 73]. De manera semejante demostraríamos ahora que ΘN también es adjunta a ella; entonces, se adjuntan a una apótoma dos rectas distintas que son conmensurables sólo en cuadrado con la (recta) entera; lo cual es imposible [X 79].

Por consiguiente, a la segunda apótoma de una medial se le adjunta únicamente una recta medial que sea conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera y que comprenda con la recta entera un rectángulo medial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 82

A una (recta) «menor» se le adjunta únicamente una recta que sea inconmensurable en cuadrado con la recta entera y que haga junto con la recta entera la suma de sus cuadrados expresable y el doble del rectángulo comprendido por ellas medial.

Sea AB la (recta) «menor», y sea $B\Gamma$ la adjunta a AB ; entonces AG , GB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable y el rectángulo comprendido por ellas medial [X 76].



Digo que no se adjuntará otra recta a AB que cumpla las mismas condiciones.

Pues, si es posible, adjúntese BA ; entonces AA , ΔB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que cumplen las condiciones antedichas [X 76]. Ahora bien, como aquello en lo que exceden los (cuadrados) de AA , ΔB a los (cuadrados) de AG , GB , en eso excede también el doble del (rectángulo comprendido) por AA , ΔB al doble del (rectángulo comprendido) por AG , GB y los (cuadrados) de AA , ΔB exceden a los cuadrados de AG , GB en un (área) expresable, porque ambos son expresables, entonces el doble del (rectángulo comprendido) por AA , ΔB excede al doble del (rectángulo comprendido) por AG , GB en un (área) expresable; lo cual es imposible, porque ambos son mediales [X 26].

Por consiguiente, a una recta «menor» se le adjunta únicamente una recta que sea inconmensurable con la (recta) entera y que haga con la (recta) entera la suma de sus cuadrados expresable y el doble del rectángulo comprendido por ellas medial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 83

A una recta que hace con un (área) expresable un (área) entera medial se le adjunta únicamente una recta que sea inconmensurable en cuadrado con la (recta) entera y que haga,

duzca la anchura EN. Pero el (cuadrado) de AB es también igual a EA; entonces el resto, el doble del (rectángulo comprendido) por AA, AB [II 7] es igual a EI. Ahora bien, como la suma de los cuadrados de AG, GB es medial y es igual a EH, entonces EH es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable EZ produciendo la anchura EM; luego EM es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Puesto que el doble del (rectángulo comprendido) por AG, GB es, a su vez, medial y es igual a EI, entonces EI es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable EZ produciendo la anchura EM; luego EM es expresable e inconmensurable en longitud con EZ [X 22]. Y como los (cuadrados) de AG, GB son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AG, GB, EH es también inconmensurable con EI; entonces EM es inconmensurable en longitud con EI [VI 1 y X 11]. Y ambos son expresables; luego EM, EI son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, EI es apótoma y EM la adjunta a ella [X 73]. De manera semejante demostraríamos, a su vez, que EI es apótoma y EN la adjunta a ella. Entonces se adjuntan a una apótoma dos (rectas) expresables diferentes que son conmensurables sólo en cuadrado con la (recta) entera; lo que se ha demostrado imposible [X 79]. Por tanto, ninguna otra recta se adjuntará a AB.

Por consiguiente, a la recta AB se le adjunta únicamente una recta que sea inconmensurable en cuadrado con la (recta) entera y que haga, con la recta entera, la suma de sus cuadrados medial, el doble del (rectángulo comprendido) por ellas, medial y además la suma de sus cuadrados inconmensurable con el doble del (rectángulo comprendido) por ellas. Q. E. D.

TERCERAS DEFINICIONES

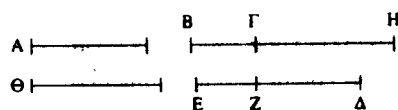
1. Dada una (recta) expresable y una apótoma, si el cuadrado de la (recta) entera es mayor que el de la (recta) adjunta en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (la recta entera), y la (recta) entera es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada, llámese (la apótoma) *primera apótoma*.
2. Y si la recta adjunta es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada, y el cuadrado de la recta entera es mayor que el de la adjunta en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella, llámese (la apótoma) *segunda apótoma*.
3. Y si ninguna de las dos es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada, y el cuadrado de la (recta) entera es mayor que el de la adjunta en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella, llámese (la apótoma) *tercera apótoma*.
4. Si, a su vez, el cuadrado de la recta entera es mayor que el de la adjunta en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (la recta entera), entonces, si la (recta) entera es conmensurable en longitud con la (recta) expresable dada, llámese (la apótoma) *cuarta apótoma*.
5. Pero si la adjunta (es conmensurable), *quinta*.
6. Y si ninguna de las dos (es conmensurable), *sexta*.

PROPOSICIÓN 85

Hallar la primera apótoma.

Póngase la (recta) expresable A, y sea BH una (recta) con-

mensurable en longitud con ella; entonces BH es también expresable. Pónganse dos números cuadrados ΔE , EZ , cuya dife-



rencia, $Z\Delta$, no sea un número cuadrado; entonces $E\Delta$ tampoco guarda con ΔZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Y hágase (de forma que) como $E\Delta$ es a ΔZ , así el cuadrado de BH al cuadrado de $H\Gamma$ [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de BH es conmensurable con el de $H\Gamma$ [X 6]. Pero el (cuadrado) de BH es expresable; así pues, el cuadrado de $H\Gamma$ también es expresable; luego $H\Gamma$ es expresable. Y como $E\Delta$ no guarda con ΔZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de BH tampoco guarda con el (cuadrado) de $H\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado.

Luego BH es inconmensurable en longitud con $H\Gamma$. Y ambas son expresables; entonces BH, $H\Gamma$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto $B\Gamma$ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que es también primera.

Pues sea el (cuadrado) de Θ aquello en lo que el (cuadrado) de BH es mayor que el (cuadrado) de $H\Gamma$. Y dado que, como $E\Delta$ es a $Z\Delta$, así el (cuadrado) de BH al (cuadrado) de $H\Gamma$, entonces, por conversión [V 11 Por.], como ΔE es a EZ , así el (cuadrado) de HB al (cuadrado) de Θ . Pero ΔE guarda con EZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, pues cada uno de ellos es cuadrado; entonces el (cuadrado) de HB guarda con el de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego BH es conmensurable en longitud con Θ [X 9]. Ahora bien, el cuadrado de BH es mayor que

el de $H\Gamma$ en el cuadrado de Θ ; entonces el cuadrado de BH es mayor que el de $H\Gamma$ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (BH). Y la (recta) entera BH es conmensurable en longitud con la recta propuesta A. Luego $B\Gamma$ es una primera apótoma [X Ter. Def. 1].

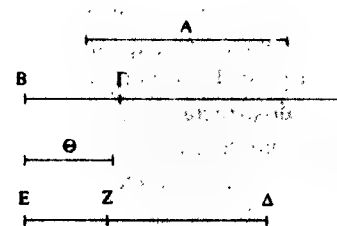
Por consiguiente, se ha hallado la primera apótoma $B\Gamma$. Que es lo que había que hallar.

PROPOSICIÓN 86

Hallar la segunda apótoma.

Póngase la (recta) expresable A y la (recta) $H\Gamma$ conmensurable en longitud con A. Entonces $H\Gamma$ es expresable. Y pónganse dos números cuadrados ΔE , EZ , cuya diferencia, ΔZ , no sea un (número) cuadrado. Y hágase de modo que, como $Z\Delta$ es a ΔE , así el cuadrado de ΓH al cuadrado de HB [X 6 Por.]. Entonces el cuadrado de ΓH es conmensurable con el cuadrado de HB [X 6]. Pero el cuadrado de ΓH es expresable. Luego el cuadrado de HB es también expresable; por tanto BH es expresable. Y como el (cuadrado) de $H\Gamma$ no guarda con el (cuadrado) de HB la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, ΓH es inconmensurable en longitud con HB [X 9]. Y ambas son expresables; entonces ΓH , HB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego $B\Gamma$ es apótoma [X 73].

Digo ahora que también es segunda.



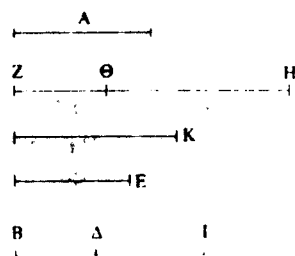
Pues sea el (cuadrado) de Θ aquello en lo que el (cuadrado) de BH es mayor que el de $H\Gamma$. Así pues, dado que, como el (cuadrado) de BH es al (cuadrado) de $H\Gamma$, así el número $E\Delta$ es al número ΔZ , entonces, por conversión, como el (cuadrado) de BH es al (cuadrado) de Θ , así ΔE a EZ [V 19 Por.]. Y cada uno de los (números) ΔE , EZ es cuadrado; entonces el cuadrado de BH guarda con el de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego BH es conmensurable en longitud con Θ [X 9]. Y el cuadrado de BH es mayor que el de $H\Gamma$ en el (cuadrado) de Θ ; así pues, el cuadrado de BH es mayor que el de $H\Gamma$ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (BH). Y la (recta) adjunta ΓH es conmensurable con la (recta) expresable propuesta A . Por tanto, $B\Gamma$ es una segunda apótoma [X Ter. Def. 2].

Por consiguiente, se ha hallado la segunda apótoma $B\Gamma$.
Q. E. D

PROPOSICION 87

Hallar la tercera apótoma.

Póngase la (recta) expresable A , y pónganse tres números E , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ que no guarden entre sí la razón que un número cua-



drado guarda con un número cuadrado, pero guarde ΓB con BA la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, y hágase de forma que, como E es a $B\Gamma$, así el cuadrado de A al cuadrado de ZH , y como $B\Gamma$ es a $\Gamma\Delta$, así el cuadrado de ZH al (cuadrado) de $H\Theta$ [X 6 Por.].

Así pues, dado que, como E es a $B\Gamma$, así el cuadrado de A al cuadrado de ZH , entonces el cuadrado de A es conmensurable con el cuadrado de ZH [X 6]. Y el cuadrado de A es expresable. Luego el cuadrado de ZH es también expresable; por tanto, ZH es expresable. Y como E no guarda con $B\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el cuadrado de A tampoco guarda con el de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego A es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]. A su vez, dado que, como $B\Gamma$ es a $\Gamma\Delta$, así el cuadrado de ZH al de $H\Theta$, entonces el (cuadrado) de ZH es conmensurable con el (cuadrado) de $H\Theta$ [X 6]. Pero el (cuadrado) de $H\Theta$ es expresable; luego el cuadrado de $H\Theta$ es también expresable; por tanto, $H\Theta$ es expresable. Ahora bien, puesto que $B\Gamma$ no guarda con $\Gamma\Delta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de ZH tampoco guarda con el (cuadrado) de $H\Theta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego ZH es inconmensurable en longitud con $H\Theta$ [X 9]; y ambas son expresables; así pues ZH , $H\Theta$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto, $Z\Theta$ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que también es tercera.

Pues dado que, como E es a $B\Gamma$, así el cuadrado de A al de ZH , mientras que como $B\Gamma$ es a $\Gamma\Delta$, así el (cuadrado) de ZH al de $H\Theta$, entonces, por igualdad, como E es a $\Gamma\Delta$, así el cuadrado de A al de $H\Theta$ [V 22]. Pero E no guarda con $\Gamma\Delta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de A tampoco guarda con el de $H\Theta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego A es inconmensurable en longitud con $H\Theta$ [X 9]. Por tanto, ninguna de las (rectas) ZH , $H\Theta$ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, A . Pues bien, sea el (cuadrado) de K aquello en lo que el (cuadrado) de ZH es mayor que el de $H\Theta$.

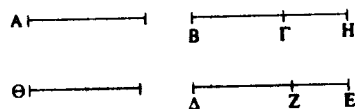
Así pues, dado que, como $B\Gamma$ es a $\Gamma\Delta$, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de $H\Theta$, entonces, por conversión, como $B\Gamma$ es a $B\Delta$, así el cuadrado de ZH al de K [V 19 Por.]. Pero $B\Gamma$ guarda con $B\Delta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de ZH guarda con el de K la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Luego ZH es conmensurable en longitud con K [X 9], y el cuadrado de ZH es mayor que el de $H\Theta$ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ZH). Y además ninguna de las (rectas) ZH , $H\Theta$ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta A ; por tanto, $Z\Theta$ es una tercera apótoma.

Por consiguiente, se ha hallado la tercera apótoma $Z\Theta$.
Q. E. D.

PROPOSICIÓN 88

Hallar la cuarta apótoma.

Póngase la recta expresable A y la (recta) BH conmensurable en longitud con A ; entonces BH es expresable. Y pónganse



los dos números ΔZ , ZE , de modo que el total ΔE no guarde con cada uno de los números ΔZ , ZE la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Y hágase de modo que, como ΔE es a EZ , así el (cuadrado) de BH al (cuadrado) de $H\Gamma$ [X 6 Por.]; entonces el (cuadrado) de BH es conmensurable con el de $H\Gamma$ [X 6]; pero el (cuadrado) de BH es expresable, luego el (cuadrado) de $H\Gamma$ es también expresable; por tanto, $H\Gamma$ es ex-

presable. Ahora bien, como ΔE no guarda con EZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de BH no guarda con el de $H\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego BH es inconmensurable en longitud con $H\Gamma$ [X 9]. Y ambas son expresables; entonces BH , $H\Gamma$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto $B\Gamma$ es apótoma [X 73].

Sea ahora el (cuadrado) de Θ aquello en lo que el (cuadrado) de BH es mayor que el de $H\Gamma$. Pues bien, dado que, como ΔE es a EZ , así el (cuadrado) de BH al de $H\Gamma$, entonces, por conversión, como ΔE es a ΔZ , así el (cuadrado) de HB al de Θ [V 19 Por.]. Pero ΔE no guarda con ΔZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego el (cuadrado) de HB tampoco guarda con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; por tanto BH es inconmensurable en longitud con Θ [X 9]. Ahora bien, el cuadrado de BH es mayor que el de $H\Gamma$ en el (cuadrado) de Θ , entonces el (cuadrado) de BH es mayor que el de $H\Gamma$ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (BH). Y la (recta) entera BH es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, A . Por tanto, $B\Gamma$ es una cuarta apótoma.

Por consiguiente se ha hallado la cuarta apótoma. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 89

Hallar la quinta apótoma.

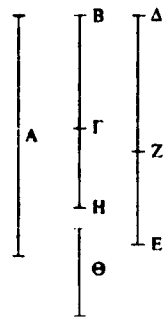
Póngase la (recta) expresable A , y sea la (recta) ΓH conmensurable en longitud con A ; entonces ΓH es expresable. Pónganse, a su vez, dos números ΔZ , ZE de modo que ΔE no guarde con ninguno de ellos la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y hágase de forma que

como ZE es a EA, así el (cuadrado) de ΓH al de HB. Entonces el (cuadrado) de HB es también expresable [X 6]; luego BH es también expresable; dado que, como ΔE es a EZ, así el (cuadrado) de BH al de $H\Gamma$, mientras que ΔE no guarda con EZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de BH tampoco guarda con el de $H\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego BH es inconmensurable en longitud con $H\Gamma$ [X 9]. Y ambas son expresables; entonces BH, $H\Gamma$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto $B\Gamma$ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que es también quinta.

Sea, pues, el (cuadrado) de Θ aquello en lo que el (cuadrado) de BH es mayor que el de $H\Gamma$. Así pues, dado que, como el (cuadrado) de BH es al de $H\Gamma$, así ΔE a EZ, entonces, por conversión, como EA es a ΔZ , así el (cuadrado) de BH al de Θ [V 19 Por.]. Pero EA no guarda con ΔZ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el (cuadrado) de BH tampoco guarda con el (cuadrado) de Θ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego BH es inconmensurable en longitud con Θ [X 9]. Y el cuadrado de BH es mayor que el de $H\Gamma$ en el (cuadrado) de Θ ; entonces el cuadrado de HB es mayor que el de $H\Gamma$ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (HB). Y la (recta) adjunta ΓH es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, A. Por tanto $B\Gamma$ es una quinta apótoma.

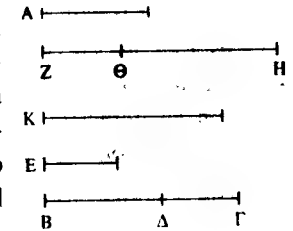
Por consiguiente, se ha hallado la quinta apótoma $B\Gamma$. Q. E. D.



PROPOSICIÓN 90

Hallar la sexta apótoma.

Póngase la recta expresable A y tres números E, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ que no guarden entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y además no guarde ΓB con $B\Delta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y hágase de forma que como E es a $B\Gamma$, así el (cuadrado) de A al (cuadrado) de ZH y como $B\Gamma$ es a $\Gamma\Delta$, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de $H\Theta$ [X 6 Por.].



Pues dado que, como E es a $B\Gamma$, así el (cuadrado) de A al (cuadrado) de ZH, entonces el (cuadrado) de A es conmensurable con el (cuadrado) de ZH [X 6]. Pero el (cuadrado) de A es expresable; luego el (cuadrado) de ZH es también expresable; por tanto ZH es también expresable; y como E no guarda con $B\Gamma$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de A no guarda con el (cuadrado) de ZH la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego A es inconmensurable en longitud con ZH [X 9]. Puesto que, como $B\Gamma$ es a $\Gamma\Delta$, así, a su vez, el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de $H\Theta$, entonces el (cuadrado) de ZH es conmensurable con el (cuadrado) de $H\Theta$ [X 6]. Pero el (cuadrado) de ZH es expresable; luego el (cuadrado) de $H\Theta$ es también expresable; por tanto, $H\Theta$ es expresable. Ahora bien, como $B\Gamma$ no guarda con $\Gamma\Delta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces el (cuadrado) de ZH tampoco guarda con el (cuadrado) de $H\Theta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego ZH es

inconmensurable en longitud con $H\Theta$ [X 9]. Y ambas son expresables; entonces ZH , $H\Theta$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, $Z\Theta$ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que además es sexta.

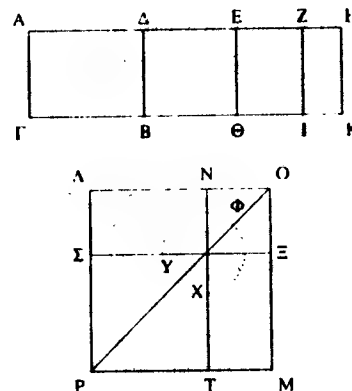
Pues dado que, como E es a $B\Gamma$, así el (cuadrado) de A al (cuadrado) de ZH , mientras que, como $B\Gamma$ es a $\Gamma\Delta$, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de $H\Theta$, entonces, por igualdad, como E es a $\Gamma\Delta$, así el (cuadrado) de A al (cuadrado) de $H\Theta$ [V 22]. Pero E no guarda con $\Gamma\Delta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el cuadrado de A tampoco guarda con el de $H\Theta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego A es inconmensurable en longitud con $H\Theta$ [X 9]; por tanto, ninguna de las rectas ZH , $H\Theta$ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable A . Así pues, sea el cuadrado de K aquello en lo que el (cuadrado) de ZH es mayor que el de $H\Theta$. Dado que, como $B\Gamma$ es a $\Gamma\Delta$, así el (cuadrado) de ZH al de $H\Theta$, entonces, por conversión, como ΓB es a $B\Delta$, así el cuadrado de ZH al (cuadrado) de K [X 19 Por.]. Pero ΓB no guarda con $B\Delta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego el (cuadrado) de ZH no guarda con el (cuadrado) de K la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Por tanto, ZH es inconmensurable en longitud con K [X 9]. Y el cuadrado de ZH es mayor que el (cuadrado) de $H\Theta$ en el (cuadrado) de K ; entonces el (cuadrado) de ZH es mayor que el cuadrado de $H\Theta$ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ZH). Y ninguna de las (rectas) ZH , $H\Theta$ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, A . Por tanto, Θ es una sexta apótoma.

Por consiguiente, se ha hallado la sexta apótoma. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 91

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una primera apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es una apótoma.

Sea, pues, comprendida el área AB por la (recta) expresable $A\Gamma$ y la primera apótoma $A\Delta$.



Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AB es una apótoma.

Pues como $A\Delta$ es una primera apótoma, sea ΔH la adjunta a ella; entonces AH , $H\Delta$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73]. Y la (recta) entera AH es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, $A\Gamma$, y el cuadrado de AH es mayor que el de $H\Delta$ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (AH) [X Ter. Def. 1]; entonces, si se aplica a AH un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ΔH , deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en (partes) conmensurables [X 17]. Divídase ΔH en dos

inconmensurable en longitud con $H\Theta$ [X 9]. Y ambas son expresables; entonces ZH , $H\Theta$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, $Z\Theta$ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que además es sexta.

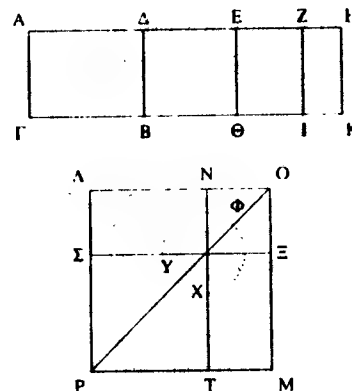
Pues dado que, como E es a $B\Gamma$, así el (cuadrado) de A al (cuadrado) de ZH , mientras que, como $B\Gamma$ es a $\Gamma\Delta$, así el (cuadrado) de ZH al (cuadrado) de $H\Theta$, entonces, por igualdad, como E es a $\Gamma\Delta$, así el (cuadrado) de A al (cuadrado) de $H\Theta$ [V 22]. Pero E no guarda con $\Gamma\Delta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; entonces el cuadrado de A tampoco guarda con el de $H\Theta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego A es inconmensurable en longitud con $H\Theta$ [X 9]; por tanto, ninguna de las rectas ZH , $H\Theta$ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable A . Así pues, sea el cuadrado de K aquello en lo que el (cuadrado) de ZH es mayor que el de $H\Theta$. Dado que, como $B\Gamma$ es a $\Gamma\Delta$, así el (cuadrado) de ZH al de $H\Theta$, entonces, por conversión, como ΓB es a $B\Delta$, así el cuadrado de ZH al (cuadrado) de K [X 19 Por.]. Pero ΓB no guarda con $B\Delta$ la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; luego el (cuadrado) de ZH no guarda con el (cuadrado) de K la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado. Por tanto, ZH es inconmensurable en longitud con K [X 9]. Y el cuadrado de ZH es mayor que el (cuadrado) de $H\Theta$ en el (cuadrado) de K ; entonces el (cuadrado) de ZH es mayor que el cuadrado de $H\Theta$ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ZH). Y ninguna de las (rectas) ZH , $H\Theta$ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, A . Por tanto, Θ es una sexta apótoma.

Por consiguiente, se ha hallado la sexta apótoma. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 91

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una primera apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es una apótoma.

Sea, pues, comprendida el área AB por la (recta) expresable $A\Gamma$ y la primera apótoma $A\Delta$.



Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AB es una apótoma.

Pues como $A\Delta$ es una primera apótoma, sea ΔH la adjunta a ella; entonces AH , $H\Delta$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73]. Y la (recta) entera AH es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, $A\Gamma$, y el cuadrado de AH es mayor que el de $H\Delta$ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (AH) [X Ter. Def. 1]; entonces, si se aplica a AH un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ΔH , deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en (partes) conmensurables [X 17]. Divídase ΔH en dos

partes iguales por el (punto) E, y aplíquese a AH un (paralelogramo) igual al (cuadrado) de EH, deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo comprendido) por AZ, ZH; entonces AZ es conmensurable con ZH. Y trácense por los puntos E, Z, H las (rectas) EΘ, ZI, HK paralelas a AF. Y puesto que AZ es conmensurable en longitud con ZH, entonces AH también es conmensurable en longitud con cada una de las (rectas) AZ, ZH [X 15]. Pero AH es conmensurable con AF; luego cada una de las (rectas) AZ, ZH es conmensurable en longitud con AF [X 12]. Y AF es expresable; por tanto, cada una de las (rectas) AZ, ZH es también expresable; de modo que cada uno de los (rectángulos) AI, ZK es también expresable [X 19]. Ahora bien, puesto que ΔE es también conmensurable en longitud con EH, entonces ΔH es también conmensurable en longitud con cada una de las (rectas) ΔE, EH [X 15]. Pero ΔH es expresable e inconmensurable en longitud con AF; así pues cada una de las (rectas) ΔE, EH es también expresable e inconmensurable en longitud con AF [X 13]; luego cada uno de los (rectángulos) ΔΘ, EK es medial [X 21].

Ahora, hágase el cuadrado AM igual a AI, y quítese un cuadrado NE que tenga el ángulo común AOM y sea igual a ZK; entonces los cuadrados AM, NE están en torno a la misma diagonal [VI 26]. Sea OP su diagonal y constrúyase la figura. Pues bien, como el rectángulo comprendido por AZ, ZH es igual al cuadrado de EH, entonces, como AZ es a EH, así EH a ZH [VI 17]. Pero como AZ es a EH, así AI a EK, mientras que, como EH es a ZH, así el (área) EK al (área) KZ [VI 1]; luego EK es media proporcional de AI, KZ [V 11]; pero MN es también media proporcional de AM, NE, como se ha probado anteriormente [Lema post. X 53]; y AI es igual al cuadrado de AM, y KZ al de NE; entonces MN es igual a EK. Pero EK es igual a ΔΘ, y MN a ΔΞ; luego ΔK es igual al gnomon [II Def. 2] YΦX y NE; pero AK es también igual a los cuadrados de AM, NE; así pues, el área res-

tante AB es igual a ΣΤ. Pero ΕΤ es el cuadrado de AN; luego el (cuadrado) de AN es igual a AB; por tanto AN es el lado del cuadrado equivalente a AB.

Digo ahora que AN es una apótoma.

Pues como cada una de las (áreas) AI, ZK es expresable, y es igual a AM, NE, entonces cada una de las (áreas) AM, NE, es decir los cuadrados de cada una de las (rectas) AO, ON, es también expresable; luego cada una de las (rectas) AO, ON es también expresable. Puesto que ΔΘ es, a su vez, medial y es igual a ΔΞ, entonces ΔΞ es también medial. Pues bien, como ΔΞ es medial y NE expresable, entonces ΔΞ es inconmensurable con NE; pero como ΔΞ es a NE, así AO a ON [VI 1]; así pues AO es inconmensurable en longitud con ON [X 11]. Ahora bien, ambas son expresables; entonces AO, ON son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego AN es una apótoma [X 73]; y es el lado del cuadrado equivalente al área AB; por tanto el lado del cuadrado equivalente al área AB es una apótoma.

Por consiguiente, si un área está comprendida por una (recta) expresable..., etc.

PROPOSICIÓN 92

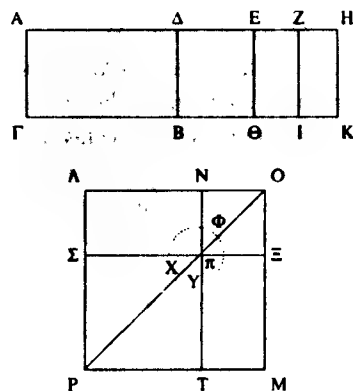
Si un área está comprendida por una recta expresable y una segunda apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es una primera apótoma de una medial.

Sea, pues, comprendida el área AB por la (recta) expresable AF y la segunda apótoma AA.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AB es una primera apótoma de una medial.

Sea, pues ΔH la adjunta a AΔ; entonces AH, HA son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73], y la ad-

junta, ΔH , es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, $A\Gamma$, y el cuadrado de la (recta) entera, AH , es mayor que el



de la adjunta $H\Delta$ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (AH) [X Ter. Def. 2]. Pues bien, como el cuadrado de AH es mayor que el de $H\Delta$ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (AH), entonces, si se aplica a AH un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de $H\Delta$, deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en partes conmensurables [X 17]. Pues bien, divídase ΔH en dos partes iguales por el (punto) E ; y aplíquese a AH un (paralelogramo) igual al (cuadrado) de EH deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo comprendido) por AZ , ZH ; entonces AZ es conmensurable en longitud con ZH . Luego AH también es conmensurable en longitud con cada una de las (rectas) AZ , ZH [X 15]. Pero AH es expresable e inconmensurable en longitud con $A\Gamma$; entonces cada una de las (rectas) AZ , ZH es expresable e inconmensurable en longitud con $A\Gamma$ [X 13]; luego cada una de las (áreas) AI , ZK es medial [X 21]. Y como ΔE es, a su vez, conmensurable con EH , entonces ΔH es también conmensurable con cada una de las (rectas) ΔE , EH [X

15]. Pero ΔH es conmensurable en longitud con $A\Gamma$. Luego cada uno de los (rectángulos) $\Delta\Theta$, EK es expresable [X 19].

Pues bien, constrúyase un cuadrado ΛM igual a AI , y quítese $N\Xi$ igual a ZK que esté en torno al mismo ángulo que ΛM , a saber ΛOM ; entonces los cuadrados ΛM , $N\Xi$ están en torno a la misma diagonal [VI 26]. Sea su diagonal OP y constrúyase la figura. Pues bien, como AI , ZK son mediales y son iguales a los (cuadrados) de ΛO , ON , los cuadrados de ΛO , ON son también mediales; luego ΛO , ON son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado³⁹. Y como el (rectángulo comprendido) por AZ , ZH es igual al (cuadrado) de EH , entonces, como AZ es a EH , así EH a ZH [VI 17]; pero, como AZ es a EH , así AI a EK ; mientras que, como EH es a ZH , así EK a ZK [VI 11]; luego EK es media proporcional de AI , ZK [V 11]. Pero MN es también media proporcional de los cuadrados ΛM , $N\Xi$; y AI es igual a ΛM y ZK a $N\Xi$; así pues, MN es igual a EK . Pero $\Delta\Theta$ es igual a EK , mientras que $\Lambda\Xi$ es igual a MN ; por tanto el (área) entera ΛK es igual al gnomon $Y\Phi X$ y $N\Xi$. Pues bien, como el (área) entera ΛK es igual a ΛM , $N\Xi$, donde ΛK es igual al gnomon $Y\Phi X$ y $N\Xi$, entonces el (área) restante AB es igual a $T\Sigma$, pero $T\Sigma$ es el (cuadrado) de ΛN ; luego el (cuadrado) de ΛN es igual al (área) AB ; por tanto ΛN es el lado del cuadrado equivalente al área AB .

Digo que ΛN es una primera apótoma de una medial.

Pues como EK es expresable y es igual a $\Lambda\Xi$, entonces $\Lambda\Xi$, es decir el (rectángulo comprendido) por ΛO , ON es expresable. Pero se ha demostrado que $N\Xi$ es medial; entonces $\Lambda\Xi$ es in-

³⁹ Hasta las últimas líneas de la proposición no se prueba que ΛO , ON son inconmensurables en longitud. Lo que debía haberse probado en el pasaje anterior es que los cuadrados de ΛO , ON son conmensurables, es decir, que ΛO , ON son «conmensurables en cuadrado» no «sólo en cuadrado» como dice el texto. Teón parece haber reparado en este punto al añadir «y conmensurables entre sí» detrás de «medial», pero esto no soluciona el problema. El manuscrito V presenta la palabra *mónon* «sólo» borrada.

Pues bien, constrúyase el cuadrado ΛM igual a ΛI y quítese $N\Xi$ igual a ZK y que esté en torno al mismo ángulo que ΛM ; entonces ΛM , $N\Xi$ están en torno a la misma diagonal [VI 26]. Sea su diagonal OP y constrúyase la figura. Así pues, como el (rectángulo comprendido) por AZ , ZH es igual al cuadrado de EH , entonces, como AZ es a EH , así EH a ZH ; y como AZ es a EH , así ΛI a EK ; y como EH es a ZH , así EK a ZK [VI 11]; y como ΛI es a EK , así EK a ZK , luego EK es media proporcional de los (rectángulos) ΛI , ZK . Y MN es también media proporcional de los cuadrados ΛM , $N\Xi$; y ΛI es igual a ΛM y ZK a $N\Xi$; por tanto EK es igual a MN . Pero MN es igual a $\Lambda\Xi$, y EK es igual a $\Delta\Theta$; entonces también el (rectángulo) entero ΔK es igual al gnomon $Y\Phi X$ y $N\Xi$; y ΔK es igual a ΛM , $N\Xi$; luego el resto AB es igual a ΣT , es decir al cuadrado de ΛN ; por tanto, ΛN es el lado del cuadrado equivalente al área AB .

Digo que ΛN es una segunda apótoma de una medial.

Pues como se ha demostrado que ΛI , ZK son mediales y son también iguales a los (cuadrados) de ΛO , ON , entonces cada uno de los (cuadrados) de ΛO , ON es también medial; luego cada una de las (rectas) ΛO , ON es también medial. Y puesto que ΛI es conmensurable con ZK [VI 1 y X 11], entonces el (cuadrado) de ΛO es también conmensurable con el (cuadrado) de ON . Como se ha demostrado, a su vez, que ΛI es inconmensurable con EK , entonces ΛM es también inconmensurable con MN , es decir, el cuadrado de ΛO con el (rectángulo comprendido) por ΛO , ON ; de modo que ΛO es también inconmensurable con ON [VI 1 y X 11]; luego ΛO , ON son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado.

Digo ahora que también comprenden un (rectángulo) medial.

Pues como se ha demostrado que EK es medial y es igual al (rectángulo comprendido) por ΛO , ON , entonces el (rectángulo comprendido) por ΛO , ON es también medial; de modo que ΛO ,

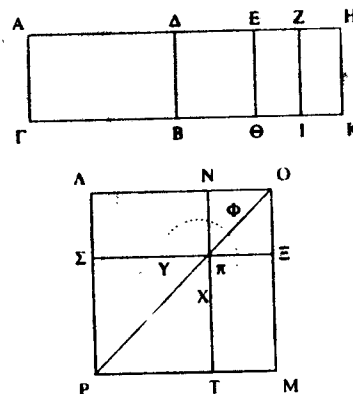
ON son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden un (rectángulo) medial. Luego ΛN es una segunda apótoma de una medial [X 75]; y es el lado del cuadrado equivalente al área AB .

Por consiguiente, el lado del cuadrado equivalente al área AB es una segunda apótoma de una medial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 94

Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una cuarta apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es una (recta) «menor».

Pues sea comprendida el área AB por la (recta) expresable $\Lambda\Gamma$ y la cuarta apótoma $\Delta\Delta$.



Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AB es una (recta) «menor».

Pues sea ΔH la adjunta a $\Delta\Delta$; entonces ΔH , $H\Delta$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y ΔH es con-

mensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta AF , y el cuadrado de la (recta) entera AH es mayor que el de la adjunta ΔH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (AH) [X Ter. Def. 4]. Pues bien, como el cuadrado de AH es mayor que el de HA en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (AH), entonces, si se aplica a AH un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ΔH deficiente en la figura de un cuadrado, la dividirá en (partes) inconmensurables [X 18]. Así pues, divídase ΔH en dos partes iguales por el (punto) E y aplíquese a AH un paralelogramo igual al (cuadrado) de EH deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo comprendido) por AZ , ZH ; entonces AZ es inconmensurable en longitud con ZH . Trácese, pues, por los (puntos) E , Z , H las (rectas) $E\Theta$, ZI , HK paralelas a AF , BA . Como en efecto AH es expresable y conmensurable en longitud con AF , entonces el (área) entera AK es expresable [X 19]. Y puesto que, a su vez, ΔH es inconmensurable en longitud con AF y ambas son expresables, entonces ΔK es medial [X 21]. Y puesto que a su vez AZ es inconmensurable en longitud con ZH , entonces AI es también inconmensurable con ZK [VI 1 y X 11]. Pues bien, constrúyase el cuadrado ΛM igual a AI y quítese $N\Xi$ igual a ZK y que está en torno al mismo ángulo ΛOM . Entonces los cuadrados ΛM , $N\Xi$ están en torno a la misma diagonal [VI 26]. Sea su diagonal OP y constrúyase la figura. Así pues, como el (rectángulo comprendido) por AZ , ZH es igual al (cuadrado) de EH , entonces, proporcionalmente, como AZ es a EH , así AI a EK , y como EH es a ZH , así EK a ZK [VI 1]; entonces EK es media proporcional de AI , ZK [V 11]. Pero MN es también media proporcional de los cuadrados ΛM , $N\Xi$ y AI es igual a ΛM , y ZK a $N\Xi$; luego EK es igual a MN . Pero $\Delta\Theta$ es igual a EK y $\Lambda\Xi$ es igual a MN . Por tanto, el (área) entera ΔK es igual al gnomon $Y\Phi X$ y $N\Xi$. Pues bien, como el (área) entera AK es igual a los cuadrados ΛM , $N\Xi$ donde ΔK es igual al gno-

mon $Y\Phi X$ y el cuadrado $N\Xi$, entonces el (área) restante AB es igual a ΣT , es decir al cuadrado de ΛN ; luego ΛN es el lado del cuadrado equivalente al (área) AB .

Digo que ΛN es la (recta) no expresable llamada «menor». Pues como AK es expresable y es igual a los (cuadrados) de ΛO , ON , entonces la suma de los (cuadrados) de ΛO , ON es expresable. Como ΔK es a su vez medial y ΔK es igual al doble del (rectángulo comprendido) por ΛO , ON , entonces el doble del (rectángulo comprendido) por ΛO , ON es medial. Y puesto que se ha demostrado que AI es inconmensurable con ZK , entonces el cuadrado de ΛO es inconmensurable también con el cuadrado de ON . Luego ΛO , ON son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados expresable y el doble del (rectángulo comprendido) por ellas medial. Por tanto, ΛN es la recta no expresable llamada «menor» [X 76]; y es el lado del cuadrado equivalente al área AB .

Por consiguiente, el lado del cuadrado equivalente al área AB es una (recta) «menor». Q. E. D.

PROPOSICIÓN 95

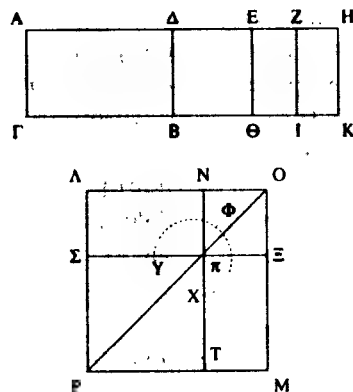
Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una quinta apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Pues sea comprendida el área AB por la (recta) expresable AF y la quinta apótoma $\Lambda\Delta$.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área AB es la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Sea, pues, ΔH la adjunta a $\Lambda\Delta$; entonces AH , HA son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado y la (recta) ad-

junta $H\Delta$ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta $A\Gamma$, y el cuadrado de la (recta) entera AH es ma-



yor que el de la adjunta ΔH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AH) [X Ter. Def. 5]. Entonces, si se aplica a AH un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ΔH , deficiente en la figura de un cuadrado, la dividirá en partes inconmensurables [X 18]. Pues bien, divídase ΔH en dos partes iguales por el (punto) E , y aplíquese a AH un paralelogramo igual al (cuadrado) de EH deficiente en la figura de un cuadrado y sea el (rectángulo comprendido) por AZ , ZH ; entonces AZ es inconmensurable en longitud con ZH . Y puesto que AH es inconmensurable en longitud con ΓA y ambas son expresables, entonces AK es medial [X 21]. Como ΔH es a su vez expresable y conmensurable en longitud con $A\Gamma$, ΔK es expresable [X 19]. Así pues, constrúyase el cuadrado ΛM igual a AI , y quítese el cuadrado $N\Xi$ igual a ZK que esté en torno al mismo ángulo ΛOM ; entonces los cuadrados ΛM , $N\Xi$ están en torno a la misma diagonal [VI 26]. Sea OP su diagonal y constrúyase la figura. De manera semejante demostraríamos que ΛN es el lado del cuadrado igual al área AB .

Digo que ΛN es la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Pues como se ha demostrado que AK es medial y es igual a los (cuadrados) de ΛO , ON , entonces la suma de los (cuadrados) de ΛO , ON es medial. Y puesto que ΔK es a su vez expresable y es igual al doble del (rectángulo comprendido) por ΛO , ON , también éste mismo es expresable. Y como AI es inconmensurable con ZK , entonces el (cuadrado) de ΛO es inconmensurable con el cuadrado de ON . Luego ΛO , ON son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el doble del (rectángulo comprendido) por ellas expresable. Por tanto, la (recta) restante ΛN es la (recta) no expresable llamada la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial [X 77]. Y es el lado del cuadrado equivalente al área AB .

Por consiguiente, el lado del cuadrado equivalente al área AB es la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 96

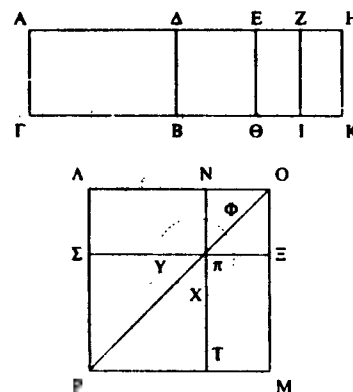
Si un área está comprendida por una (recta) expresable y una sexta apótoma, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) que hace con un área medial un (área) entera medial.

Pues sea comprendida el área AB por la (recta) expresable $A\Gamma$ y la sexta apótoma $A\Delta$.

Digo que el lado del cuadrado equivalente a AB es la (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Pues sea ΔH la adjunta a $A\Delta$; entonces AH , $H\Delta$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado y ninguna de

ellas es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta AG y el cuadrado de la (recta) entera AH es mayor



que el de la adjunta ΔH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (AH) [X Ter. Def. 6]: pues bien, como el cuadrado de AH es mayor que el de ΔH en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable en longitud con ella (AH), entonces, si se aplica a AH un paralelogramo igual a la cuarta parte del (cuadrado) ΔH deficiente en la figura de un cuadrado, lo dividirá en partes inconmensurables [X 18].

Así pues, divídase ΔH en dos partes iguales por el (punto) E , y aplíquese a AH un paralelogramo igual al (cuadrado) de ΔH , deficiente en la figura de un cuadrado, y sea el (rectángulo comprendido) por AZ , ZH ; entonces AZ es inconmensurable en longitud con ZH . Pero, como AZ es a ZH , así AI a ZK [VI 1]; luego AI es inconmensurable con ZK [X 11]. Y puesto que AH , AG son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, AK es medial [X 21]. Puesto que AG , ΔH son, a su vez, expresables e inconmensurables en longitud, ΔK es también medial [X 21]. Pues bien, como AH , ΔH son conmensurables sólo en cuadrado, entonces AH es inconmensurable en longitud con ΔH .

Pero como AH es a ΔH , así AK a $K\Delta$ [VI 1]; luego AK es inconmensurable con $K\Delta$ [X 11]. Constrúyase, pues, el cuadrado AM igual a AI , y quítese NE igual a ZK y en torno al mismo ángulo; entonces los cuadrados AM , NE están en torno a la misma diagonal [X 26]. Sea su diagonal OP y constrúyase la figura. De manera semejante a los (teoremas) anteriores demostraríamos que AN es el lado del cuadrado equivalente al (área) AB .

Digo que AN es la (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Pues como se ha demostrado que AK es medial y es también igual a los (cuadrados) de AO , ON , entonces la suma de los (cuadrados) de AO , ON es medial. Como se ha demostrado a su vez que ΔK es medial y es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AO , ON , el doble del (rectángulo comprendido) por AO , ON es medial. Y como se ha demostrado que AK es inconmensurable con ΔK , los cuadrados de AO , ON son también inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AO , ON . Y puesto que AI es inconmensurable con ZK , entonces el (cuadrado) de AO es inconmensurable con el (cuadrado) de ON ; luego AO , ON son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el doble del (rectángulo comprendido) por ellas medial y además sus cuadrados inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por ellas. Por tanto, AN es la (recta) no expresable llamada la que hace con un (área) medial un (área) entera medial [X 78]; y es el lado del cuadrado equivalente al área AB .

Por consiguiente, el lado del cuadrado equivalente al área es la (recta) que hace con un (área) medial un área entera medial. Q. E. D.

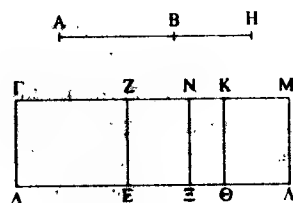
PROPOSICIÓN 97

El cuadrado de una apótoma aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una primera apótoma.

Sea AB la apótoma y $\Gamma\Delta$ la (recta) expresable y aplíquese a $\Gamma\Delta$ el (paralelogramo) $\Gamma\Theta$ igual al cuadrado de AB que produzca la anchura ΓZ .

Digo que ΓZ es una primera apótoma.

Sea, pues, BH la adjunta a AB ; entonces AH , HB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73]. Y aplí-



quese a $\Gamma\Delta$ el (paralelogramo) $\Gamma\Theta$ igual al (cuadrado) de AH , y el (paralelogramo) KA igual al cuadrado de BH . Entonces el (paralelogramo) entero $\Gamma\Lambda$ es igual a los (cuadrados) de AH , HB donde ΓE es igual al (cuadrado) de AB ; luego el (área) restante $Z\Lambda$ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH , HB [II 7]. Divídase ZM en dos partes iguales por el (punto) N , y trácese por el (punto) N la (recta) $N\Xi$ paralela a $\Gamma\Delta$; entonces cada uno de los (rectángulos) $Z\Xi$, $\Lambda\Xi$ es igual al (rectángulo comprendido) por AH , HB . Y como los (cuadrados) de AH , HB son expresables, y ΔM es igual a los (cuadrados) de AH , HB , entonces ΛM es expresable, y se ha aplicado a la (recta) expresable $\Gamma\Delta$ produciendo la anchura ΓM ; luego ΓM es expresable y conmensurable en longitud con $\Gamma\Delta$ [X 20]. Como el doble del (rectángulo comprendido) por AH , HB es a su vez medial, y $Z\Lambda$ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH , HB , entonces $Z\Lambda$ es medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable $\Gamma\Delta$ produciendo la anchura ZM ; entonces ZM es expresable e inconmensurable en longitud con

$\Gamma\Delta$ [X 22]. Y como los (cuadrados) de AH , HB son expresables, mientras que el doble del (rectángulo comprendido) por AH , HB es medial, entonces los (cuadrados) de AH , HB son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AH , HB . Y $\Gamma\Lambda$ es igual a los (cuadrados) de AH , HB y $Z\Lambda$ al doble del (rectángulo comprendido) por AH , HB ; así pues ΔM es inconmensurable con $Z\Lambda$. Pero, como ΔM es a $Z\Lambda$, así ΓM a ZM [VI 1]. Entonces ΓM es inconmensurable en longitud con ZM [X 11]. Y ambas son expresables; luego ΓM , MZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto, ΓZ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que es también primera.

Pues como el (rectángulo comprendido) por AH , HB es media proporcional de los cuadrados de AH , HB , y $\Gamma\Theta$ es igual al (cuadrado) de AH , mientras que KA es igual al (cuadrado) de BH y NA al (rectángulo comprendido) por AH , HB , entonces NA es media proporcional de $\Gamma\Theta$, KA ; luego, como $\Gamma\Theta$ es a NA , así NA a KA . Pero como $\Gamma\Theta$ es a NA , así ΓK a NM ; y como NA es a KA , así NM a KM [VI 1]; entonces el (rectángulo comprendido) por ΓK , KM , es igual al (cuadrado) de NM [VI 17], es decir a la cuarta parte del (cuadrado) de ZM . Ahora bien, puesto que el (cuadrado) de AH es conmensurable con el de HB , $\Gamma\Theta$ es también conmensurable con KA . Pero como $\Gamma\Theta$ es a KA , así ΓK a KM [VI 1]; entonces ΓK es conmensurable con KM [X 11]. Pues bien, como ΓM , MZ son dos rectas desiguales y se ha aplicado a ΓM el (rectángulo comprendido) por ΓK , KM igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ZM y deficiente en la figura de un cuadrado, y ΓK es conmensurable con KM , entonces el cuadrado de ΓM es mayor que el de MZ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (ΓM) [X 17]. Y ΓM es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta $\Gamma\Delta$; por tanto ΓZ es una primera apótoma [X Ter. Def. 1].

Por consiguiente, el (cuadrado) de una apótoma aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una primera apótoma. Q. E. D.

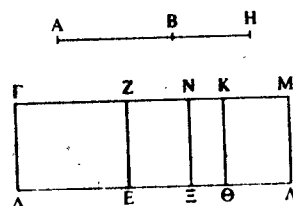
PROPOSICIÓN 98

El cuadrado de una primera apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una segunda apótoma.

Sea, pues, AB la primera apótoma de una medial y $\Gamma\Delta$ la (recta) expresable, y aplíquese a $\Gamma\Delta$ el (paralelogramo) ΓE igual al (cuadrado) de AB que produzca la anchura ΓZ .

Digo que ΓZ es una segunda apótoma.

Pues sea BH la adjunta a AB; entonces AH, HB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden



un (rectángulo) expresable [X 74]. Y aplíquese a $\Gamma\Delta$ el paralelogramo $\Gamma\Theta$ igual al (cuadrado) de AH produciendo la anchura ΓK , y el (paralelogramo) $K\Lambda$ igual al (cuadrado) de HB produciendo la anchura KM ; entonces el (área) entera $\Gamma\Lambda$ es igual a los (cuadrados) de AH, HB; así pues $\Gamma\Lambda$ es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y se ha aplicado a la (recta) expresable $\Gamma\Delta$ produciendo la anchura ΓM ; entonces ΓM es expresable e inconmensurable en longitud con $\Gamma\Delta$ [X 22]. Y como $\Gamma\Lambda$ es igual a los (cuadrados) de AH, HB donde el (cuadrado) de AB es igual a ΓE , entonces el (área) restante, el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB, es igual a $Z\Lambda$ [II 7]. Pero el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB es expresable; luego $Z\Lambda$ es expresable. Y se ha aplicado a la

(recta) expresable ZE produciendo la anchura ZM; por tanto, ZM es también expresable y conmensurable en longitud con $\Gamma\Delta$ [X 20]. Pues bien, como (la suma de) los (cuadrados) de AH, HB, es decir $\Gamma\Lambda$, es medial, mientras que el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB, es decir, $Z\Lambda$ es expresable, entonces $\Gamma\Lambda$ es inconmensurable con $Z\Lambda$. Pero como $\Gamma\Lambda$ es a $Z\Lambda$, así ΓM a ZM [VI 1]; entonces ΓM es inconmensurable en longitud con ZM [X 11]; y ambas son expresables; luego ΓM , MZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, por tanto, ΓZ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que también es segunda.

Pues divídase ZM en dos partes iguales por el (punto) N, y trácese, por el (punto) N, la (recta) $N\Xi$ paralela a $\Gamma\Delta$; entonces cada una de las (áreas) $Z\Xi$, $N\Lambda$ es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB; y puesto que el (rectángulo comprendido) por AH, HB es media proporcional de los (cuadrados) de AH, HB, y el cuadrado de AH es igual a $\Gamma\Theta$, mientras que el (rectángulo comprendido) por AH, HB es (igual) a $N\Lambda$ y el (cuadrado) de BH a $K\Lambda$, entonces $N\Lambda$ es media proporcional de $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$. Luego, como $\Gamma\Theta$ es a $N\Lambda$, así $N\Lambda$ a $K\Lambda$. Pero como $\Gamma\Theta$ es a $N\Lambda$, así ΓK a NM, y como $N\Lambda$ es a $K\Lambda$, así NM a MK [VI 1]; entonces, como ΓK es a NM, así NM a KM [V 11]; luego el (rectángulo comprendido) por ΓK , KM es igual al (cuadrado) de NM [VI 17], es decir a la cuarta parte del (cuadrado) de ZM. Pues bien, como ΓM , MZ son dos rectas desiguales, y se ha aplicado a la mayor, ΓM , el (rectángulo comprendido) por ΓK , KM igual a la cuarta parte del (cuadrado) de MZ, deficiente en la figura de un cuadrado y la divide en partes conmensurables, entonces el cuadrado de ΓM es mayor que el de MZ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable en longitud con ella (ΓM) [X 17]. Y la adjunta ZM es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta $\Gamma\Delta$; luego ΓZ es una segunda apótoma [X Ter. Def. 2]

Por consiguiente, el cuadrado de la primera apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una segunda apótoma. Q. E. D.

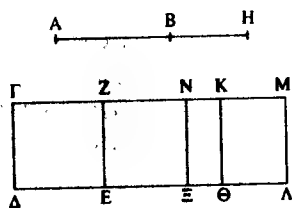
PROPOSICIÓN 99

El cuadrado de una segunda apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una tercera apótoma.

Sea AB la segunda apótoma de una medial, y $\Gamma\Delta$ la (recta) expresable, y aplíquese a $\Gamma\Delta$ el (paralelogramo) ΓE igual al (cuadrado) de AB produciendo la anchura ΓZ .

Digo que ΓZ es una tercera apótoma.

Sea, pues, BH la adjunta a AB; entonces AH, HB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprenden



un (rectángulo) medial [X 75]. Y aplíquese a $\Gamma\Delta$ el (paralelogramo) $\Gamma\Theta$ igual al (cuadrado) de AH produciendo la anchura ΓK , y aplíquese a $K\Theta$ el (paralelogramo) $K\Lambda$ igual al (cuadrado) de BH produciendo la anchura KM;

entonces el (área) entera $\Gamma\Lambda$ es igual a los (cuadrados) de AH, HB; luego $\Gamma\Lambda$ es también medial [X 15 y 23 Por.]. Y se ha aplicado a la (recta) expresable $\Gamma\Delta$ produciendo la anchura ΓM ; por tanto ΓM es expresable e inconmensurable en longitud con $\Gamma\Delta$ [X 23]. Y como el (área) entera $\Gamma\Lambda$ es igual a los (cuadrados) de AH, HB, donde ΓE es igual al (cuadrado) de AB, entonces el (área) restante ΛZ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB [II 7]. Pues bien, divídase ZM en dos partes iguales por el (punto) N, y trácese NE paralela a $\Gamma\Delta$; entonces

cada una de las (áreas) ZE, NA es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB. Pero el (rectángulo comprendido) por AH, HB es medial; entonces ZA es también medial. Y se ha aplicado a la recta expresable EZ produciendo la anchura ZM; luego ZM es también expresable e inconmensurable en longitud con $\Gamma\Delta$ [X 22]. Y como AH, HB son conmensurables sólo en cuadrado, entonces AH es inconmensurable en longitud con HB; luego el (cuadrado) de AH es también inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por AH, HB [VI 1 y X 11]. Pero los (cuadrados) de AH, HB son conmensurables con el (cuadrado) de AH, y el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB con el (rectángulo comprendido) por AH, HB; así pues los (cuadrados) de AH, HB son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB [X 13].

Pero $\Gamma\Lambda$ es igual a los (cuadrados) de AH, HB, mientras que ZA es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB; entonces $\Gamma\Lambda$ es inconmensurable con ZA.

Pero como $\Gamma\Lambda$ es a ZA, así ΓM a ZM [VI 1]. Entonces, ΓM es inconmensurable en longitud con ZM. Y ambas son expresables; luego ΓM , ZM son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto ΓZ es apótoma [X 73].

Digo ahora que también es tercera.

Pues como el (cuadrado) de AH es conmensurable con el (cuadrado) de HB, entonces $\Gamma\Theta$ es conmensurable con $K\Lambda$; de modo que ΓK lo es también con KM [VI 1 y X 11]. Y como el (rectángulo comprendido) por AH, HB es media proporcional de los (cuadrados) de AH, HB, y $\Gamma\Theta$ es igual a AH, mientras que $K\Lambda$ es igual al (cuadrado) de HB, y NA al (rectángulo comprendido) por AH, HB, entonces NA es también media proporcional de $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$; luego, como $\Gamma\Theta$ es a NA, así NA a $K\Lambda$. Pero como $\Gamma\Theta$ es a NA, así ΓK a NM, y como NA es a $K\Lambda$, así NM a KM [VI 1]; entonces, como ΓK es a NM, así NM a KM [V 11]; luego el rectángulo comprendido por ΓK , KM es igual [al cuadrado de NM,

es decir]⁴⁰ a la cuarta parte del (cuadrado) de ZM. Pues bien, como ΓM , MZ son dos rectas desiguales y se ha aplicado a ΓM un (paralelogramo) igual a la cuarta parte del (cuadrado) de ZM, deficiente en la figura de un cuadrado y la divide en (partes) conmensurables, entonces el cuadrado de ΓM es mayor que el de MZ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΓM) [X 17]; y ninguna de las (rectas) ΓM , MZ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta $\Gamma \Delta$; por tanto ΓZ es una tercera apótoma [X Ter. Def. 3].

Por consiguiente, el cuadrado de una segunda apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una tercera apótoma. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 100

El cuadrado de una (recta) «menor», aplicado a una (recta) expresable produce como anchura un cuarta apótoma.

Sea AB la (recta) «menor», y $\Gamma \Delta$ la expresable, y aplíquese a la (recta) expresable $\Gamma \Delta$ el (paralelogramo) ΓE igual al cuadrado de AB , produciendo la anchura ΓZ .

Digo que ΓZ es una cuarta apótoma.

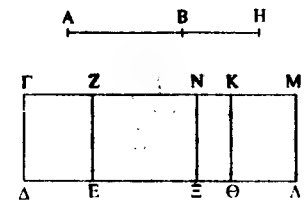
Sea, pues, BH la adjunta a AB ; entonces AH , HB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de los cuadrados de AH , HB expresable y el doble del (rectángulo comprendido) por AH , HB medial [X 76]. Y aplíquese a $\Gamma \Delta$ el (paralelogramo) $\Gamma \Theta$ igual al (cuadrado) de AH produciendo la anchura ΓK , y el (paralelogramo) $K\Lambda$ igual al (cuadrado) de BH produciendo la anchura KM ; entonces el (área) entera $\Gamma \Lambda$ es

⁴⁰ Heiberg atetiza estas palabras que Heath mantiene en su traducción entre corchetes

igual a los (cuadrados) de AH , HB . Y la suma de los (cuadrados) de AH , HB es expresable; entonces $\Gamma \Lambda$ es también expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable $\Gamma \Delta$ produciendo la anchura ΓM ; luego ΓM es también expresable y conmensurable en longitud con $\Gamma \Delta$ [X 20]. Y como el (área) entera $\Gamma \Lambda$ es igual a los (cuadrados) de AH , HB , donde ΓE es igual al (cuadrado) de AB , entonces el (área) restante $Z\Lambda$ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH , HB [II 7]. Pues bien, divídase ZM en dos partes iguales por el (punto) N , y trácese, por el (punto) N , la (recta) NE paralela a las dos (rectas) $\Gamma \Delta$, $M\Lambda$; entonces, cada uno de los (rectángulos) $Z\Xi$, $N\Lambda$ es igual al (rectángulo comprendido) por AH , HB . Y como el doble del (rectángulo comprendido) por AH , HB es medial y es igual a $Z\Lambda$, entonces $Z\Lambda$ también es medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ZE produciendo la anchura ZM ; luego ZM es expresable e inconmensurable en longitud con $\Gamma \Delta$ [X 22]. Y puesto que la suma de los (cuadrados) de AH , HB es expresable, mientras que el (rectángulo comprendido) por AH , HB es medial, entonces los cuadrados de AH , HB son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AH , HB . Pero $\Gamma \Lambda$ es igual a los cuadrados de AH , HB y $Z\Lambda$ al doble del (rectángulo comprendido) por AH , HB . Luego $\Gamma \Lambda$ es inconmensurable con $Z\Lambda$. Pero como $\Gamma \Lambda$ es a $Z\Lambda$, así ΓM a MZ [VI 1]; entonces ΓM es inconmensurable en longitud con MZ [X 11]. Y ambas son expresables; luego ΓM , MZ son rectas expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto ΓZ es una apótoma [X 73].

Digo que también es cuarta.

Pues como AH , HB son inconmensurables en cuadrado, entonces el (cuadrado) de AH es inconmensurable con el (cuadra-



do) de HB. Y $\Gamma\Theta$ es igual al (cuadrado) de AH, mientras que $\kappa\lambda$ es igual al (cuadrado) de HB; así pues, $\Gamma\Theta$ es incommensurable con $\kappa\lambda$. Pero como $\Gamma\Theta$ es a $\kappa\lambda$, así $\Gamma\kappa$ a $\kappa\mu$ [VI 1]. Entonces $\Gamma\kappa$ es incommensurable en longitud con $\kappa\mu$. Y como el (rectángulo comprendido) por AH, HB es media proporcional de la suma de los (cuadrados) de AH, HB, y $\Gamma\Theta$ es igual al (cuadrado) de AH, mientras que el (cuadrado) de HB es igual a $\kappa\lambda$, y el (rectángulo comprendido) por AH, HB a $\kappa\lambda$, entonces $\kappa\lambda$ es media proporcional de $\Gamma\Theta$, $\kappa\lambda$; luego como $\Gamma\Theta$ es a $\kappa\lambda$, así $\kappa\lambda$ a $\kappa\lambda$; pero como $\Gamma\Theta$ es a $\kappa\lambda$, así $\Gamma\kappa$ a $\mu\kappa$ y como $\kappa\lambda$ es a $\kappa\lambda$, así $\mu\kappa$ a $\kappa\mu$ [VI 1]; entonces, como $\Gamma\kappa$ es a $\mu\kappa$, así $\mu\kappa$ a $\kappa\mu$ [V 11]. Luego el (rectángulo comprendido) por $\Gamma\kappa$, $\kappa\mu$ es igual al (cuadrado) de $\mu\kappa$ [VI 17], es decir a la cuarta parte del (cuadrado) de $\mu\kappa$. Pues bien, como $\Gamma\mu$, $\mu\kappa$ son dos rectas desiguales, y se ha aplicado a $\Gamma\mu$ el (rectángulo comprendido) por $\Gamma\kappa$, $\kappa\mu$ igual a la cuarta parte del (cuadrado) de $\mu\kappa$, deficiente en la figura de un cuadrado y la divide en (partes) incommensurables, entonces el cuadrado de $\Gamma\mu$ es mayor que el de $\mu\kappa$ en el (cuadrado) de una (recta) incommensurable con ella ($\Gamma\mu$) [X 18]. Y la (recta) entera $\Gamma\mu$ es commensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta $\Gamma\Delta$; por tanto, $\Gamma\kappa$ es una cuarta apótoma [X Ter. Def. 4].

Por consiguiente, el (cuadrado) de una (recta) «menor»... etc. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 101

El cuadrado de la recta que hace con un (área) expresable un (área) entera medial, aplicado a una recta expresable, produce como anchura una quinta apótoma.

Sea, pues, AB la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial, y $\Gamma\Delta$ la (recta) expresable, y aplíquese a

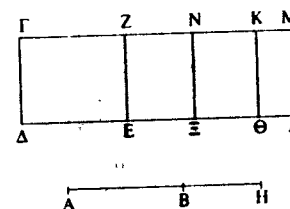
$\Gamma\Delta$ el (paralelogramo) $\Gamma\Theta$ igual al (cuadrado) de AB produciendo la anchura $\Gamma\kappa$.

Digo que $\Gamma\kappa$ es una quinta apótoma.

Sea, pues, BH la (recta) adjunta a AB. Entonces, AH, HB son rectas incommensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el doble del

(rectángulo comprendido) por ellas expresable [X 77]. Y aplíquese a $\Gamma\Delta$ el (paralelogramo) $\Gamma\Theta$

igual al (cuadrado) de AH, y el (paralelogramo) $\kappa\lambda$ igual al (cuadrado) de HB; entonces el (área)



entera $\Gamma\Lambda$ es igual a los (cuadrados) de AH, HB. Pero la suma de los (cuadrados) de AH, HB es medial; entonces $\Gamma\Lambda$ es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable $\Gamma\Lambda$ produciendo la anchura $\Gamma\mu$; luego $\Gamma\mu$ es expresable e incommensurable con $\Gamma\Delta$ [X 22]. Y como el (área) entera $\Gamma\Lambda$ es igual a los (cuadrados) de AH, HB, donde $\Gamma\Theta$ es igual al (cuadrado) de AB, entonces el (área) restante $\text{Zeta}\Lambda$ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB [II 7]. Pues bien, divídase $\text{Zeta}\mu$ en dos partes iguales por el (punto) N, y trácese por el (punto) N, la (recta) NE paralela a las dos (rectas) $\Gamma\Delta$, $\mu\Lambda$; entonces cada uno de los (rectángulos) ZetaNE , $\text{NE}\Lambda$ es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB. Y puesto que el doble del (rectángulo comprendido) por AH, HB es expresable y es igual a $\text{Zeta}\Lambda$, entonces $\text{Zeta}\Lambda$ es expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable $\text{Zeta}\Lambda$ produciendo la anchura $\text{Zeta}\mu$; luego $\text{Zeta}\mu$ es expresable y commensurable en longitud con $\Gamma\Delta$ [X 20]. Y como $\Gamma\Lambda$ es medial y $\text{Zeta}\Lambda$ expresable, entonces $\Gamma\Lambda$ es incommensurable con $\text{Zeta}\Lambda$. Pero como $\Gamma\Lambda$ es a $\text{Zeta}\Lambda$, así $\Gamma\mu$ a μZeta [VI 1]; entonces $\Gamma\mu$ es incommensurable en longitud con μZeta [X 11]. Y ambas son expresables; luego $\Gamma\mu$, μZeta son (rectas) expresables commensurables sólo en cuadrado; por tanto $\Gamma\kappa$ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que también es quinta.

Pues de manera semejante demostraríamos que el (rectángulo) ΓK , KM es igual al (cuadrado) de NM , es decir, a la cuarta parte del (cuadrado) de ZM .

Y puesto que el (cuadrado) de AH es inconmensurable con el (cuadrado) de HB , mientras que el (cuadrado) de AH es igual a $\Gamma\Theta$, y el (cuadrado) de HB a $K\Lambda$, entonces $\Gamma\Theta$ es inconmensurable con $K\Lambda$. Pero como $\Gamma\Theta$ es a $K\Lambda$, así ΓK a KM [VI 1]; luego ΓK es inconmensurable en longitud con KM [X 11]. Pues bien, como ΓM , MZ son dos rectas desiguales y se ha aplicado a ΓM un paralelogramo igual a la cuarta parte del cuadrado de ZM , deficiente en la figura de un cuadrado y la divide en (partes) inconmensurables, entonces, el cuadrado de ΓM es mayor que el de MZ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (ΓM) [X 18]. Y la adjunta ZM es conmensurable con la (recta) expresable propuesta $\Gamma\Delta$.

Por consiguiente, ΓZ es una quinta apótoma [X Ter. Def. 5].
Q. E. D.

PROPOSICIÓN 102

El cuadrado de la (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial, aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una sexta apótoma.

Sea, pues, AB la que hace con un (área) medial un (área) entera medial y $\Gamma\Delta$ la (recta) expresable, y aplíquese a $\Gamma\Delta$ el (paralelogramo) ΓE igual al (cuadrado) de AB produciendo la anchura ΓZ .

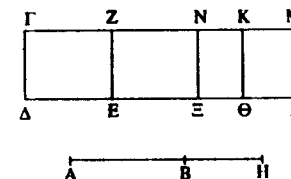
Digo que ΓZ es una sexta apótoma.

Sea, pues, BH la adjunta a AB ; entonces AH , HB , son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el doble del (rectángulo comprendido) por AH ,

HB medial y los cuadrados de AH , HB inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AH , HB [X 78]. Pues bien, aplíquese a $\Gamma\Delta$ el (paralelogramo) $\Gamma\Theta$ igual al (cuadrado) de AH produciendo la anchura ΓK y el (paralelogramo) $K\Lambda$ igual al (cuadrado) de BH ; entonces el (área) entera $\Gamma\Lambda$ es igual a los (cuadrados) de AH , HB ; luego $\Gamma\Lambda$ es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable $\Gamma\Delta$ produciendo la anchura ΓM ; así pues, ΓM es expresable e inconmensurable en longitud con $\Gamma\Delta$ [X 22]. Pues bien, como $\Gamma\Lambda$ es igual a los (cuadrados) de AH , HB , donde ΓE es igual al (cuadrado) de AB , entonces, el (área) restante $Z\Lambda$ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH , HB [II 7]. Y el doble del (rectángulo comprendido) por AH , HB es medial; luego $Z\Lambda$ es también medial. Y se ha aplicado a la (recta) expresable ZE produciendo la anchura ZM ; luego ZM es expresable e inconmensurable en longitud con $\Gamma\Delta$ [X 22]. Y puesto que los (cuadrados) de AH , HB son inconmensurables con el doble del (rectángulo comprendido) por AH , HB y $\Gamma\Lambda$ es igual a los (cuadrados) de AH , HB , y $Z\Lambda$ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH , HB , entonces $\Gamma\Lambda$ es inconmensurable con $Z\Lambda$. Pero como $\Gamma\Lambda$ es a $Z\Lambda$, así ΓM a MZ [VI 1]; entonces ΓM es inconmensurable en longitud con MZ [X 11]. Y ambas son expresables. Luego ΓM , MZ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Por tanto ΓZ es una apótoma [X 73].

Digo ahora que también es sexta.

Pues como $Z\Lambda$ es igual al doble del (rectángulo comprendido) por AH , HB , divídase ZM en dos partes iguales por el (punto) N , y trácese por el (punto) N la (recta) $N\Xi$ paralela a $\Gamma\Delta$; entonces cada una de las (áreas) $Z\Xi$, $N\Lambda$ es igual al (rectángulo comprendido) por AH , HB . Y como AH , HB son inconmensura-



bles en cuadrado, entonces el (cuadrado) de AH es inconmensurable con el (cuadrado) de HB. Pero $\Gamma\Theta$ es igual al (cuadrado) de AH, y $\kappa\lambda$ es igual al (cuadrado) de HB. Así pues, $\Gamma\Theta$ es inconmensurable con $\kappa\lambda$. Pero como $\Gamma\Theta$ es a $\kappa\lambda$, así $\Gamma\kappa$ a $\kappa\mu$ [VI 11]; luego $\Gamma\kappa$ es inconmensurable con $\kappa\mu$ [X 11]; y puesto que el (rectángulo comprendido) por AH, HB es media proporcional de los cuadrados de AH, HB, y $\Gamma\Theta$ es igual al (cuadrado) de AH, mientras que $\kappa\lambda$ es igual al (cuadrado) de HB, y $\mu\lambda$ es igual al (rectángulo comprendido) por AH, HB, entonces $\mu\lambda$ es también media proporcional de $\Gamma\Theta$, $\kappa\lambda$; por tanto, como $\Gamma\Theta$ es a $\mu\lambda$, así $\mu\lambda$ a $\kappa\lambda$. Y por lo mismo, el cuadrado de $\Gamma\mu$ es mayor que el de $\mu\lambda$ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella ($\Gamma\mu$) [X 18]. Y ninguna de ellas es conmensurable con la (recta) expresable propuesta $\Gamma\Delta$.

Por consiguiente, $\Gamma\lambda$ es una sexta apótoma. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 103

Una recta conmensurable en longitud con una apótoma es apótoma y del mismo orden.

Sea AB una apótoma, y sea $\Gamma\Delta$ conmensurable en longitud con ella.

Digo que $\Gamma\Delta$ es apótoma y del mismo orden que AB.

Pues como AB es una apótoma, sea BE la adjunta a ella; entonces AE, EB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73]. Y hágase de forma que $\Gamma\Delta$ guarde con AB la misma razón que BE con $\Delta\lambda$ [VI 12]; entonces como una es a una, así todas a todas [V 12]⁴¹; luego como la (recta) entera AE

es a la (recta) entera $\Gamma\lambda$, así también AB a $\Gamma\Delta$. Pero AB es conmensurable en longitud con $\Gamma\Delta$. Entonces AE es también conmensurable con $\Gamma\lambda$ y BE con $\Delta\lambda$ [X 11].

Ahora bien, AE, EB son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego $\Gamma\lambda$, $\Delta\lambda$ son también (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 13].

Ahora bien, dado que, como AE es a $\Gamma\lambda$, así BE a $\Delta\lambda$, entonces, por alternancia, como AE es a EB, así $\Gamma\lambda$ a $\Delta\lambda$ [VI 16]. Así pues, el cuadrado de AE es mayor que el de EB o bien en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con (AE), o bien en el de una inconmensurable con ella. Pues bien, si el cuadrado de AE es mayor que el de EB en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (AE), el cuadrado de $\Gamma\lambda$ también será mayor que el de $\Delta\lambda$ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella ($\Gamma\lambda$) [X 14]. Y si AE es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, también lo será $\Gamma\lambda$ [X 12], pero, si BE, también $\Delta\lambda$ [id], y si ninguna de las (rectas) AE, EB (lo es), tampoco (lo será) ninguna de las (rectas) $\Gamma\lambda$, $\Delta\lambda$ [X 13]. Pero si el cuadrado de AE es mayor que [el de EB] en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (AE), el cuadrado de $\Gamma\lambda$ será también mayor que el de $\Delta\lambda$ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella ($\Gamma\lambda$) [X 14]. Ahora bien, si AE es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, también $\Gamma\lambda$, y si BE (lo es), también $\Delta\lambda$ [X 12], pero si no lo es ninguna de las (rectas) AE, EB tampoco lo será ninguna de las (rectas) $\Gamma\lambda$, $\Delta\lambda$ [X 13].

Por consiguiente, $\Gamma\Delta$ es apótoma y del mismo orden que AB. Q. E. D.

⁴¹ Se entiende: «como una de las magnitudes antecedentes es a una de las consecuentes, así todas las antecedentes a todas las consecuentes».

PROPOSICIÓN 104

Una recta conmensurable con una apótoma de una medial es apótoma de una medial y del mismo orden.

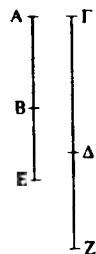
Sea, pues, AB una apótoma de una medial, y sea $\Gamma\Delta$ conmensurable en longitud con AB; digo que $\Gamma\Delta$ es también apótoma de una medial y del mismo orden que AB.

Pues como AB es una apótoma de una medial, sea EB la adjunta. Entonces AE, EB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado [X 74, 75]. Y hágase de forma que, como AB es a $\Gamma\Delta$, así BE a ΔZ [VI 12]; entonces AE es también conmensurable con ΓZ y BE con ΔZ [V 12 y X 11]. Pero AE, EB son (rectas) mediales conmensurables sólo en cuadrado; entonces ΓZ , ΔZ son también rectas mediales [X 23] conmensurables sólo en cuadrado [X 13]; luego $\Gamma\Delta$ es apótoma de una medial [X 74, 75].

Digo ahora que es también del mismo orden que AB.

Pues, como AE es a EB, así ΓZ a ΔZ , entonces, como el (cuadrado) de AE es al (rectángulo comprendido) por AE, EB, así el (cuadrado) de ΓZ al (rectángulo comprendido) por ΓZ , ΔZ . Pero el (cuadrado) de AE es conmensurable con el de ΓZ ; luego el (rectángulo comprendido) por AE, EB es también conmensurable con el (rectángulo comprendido) por ΓZ , ΔZ [V 6 y X 11]. Pues bien, si el (rectángulo comprendido) por AE, EB es expresable, el (rectángulo comprendido) por ΓZ , ΔZ será también expresable [X Def. 4], si el (rectángulo comprendido) por AE, EB es medial, el (rectángulo comprendido) por ΓZ , ΔZ es también medial [X 23 Por.].

Por consiguiente, $\Gamma\Delta$ es una apótoma de una medial y del mismo orden que AB. Q. E. D.



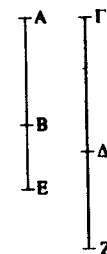
PROPOSICIÓN 105

Una (recta) conmensurable con una (recta) «menor» es «menor».

Sea, pues, AB la recta «menor» y $\Gamma\Delta$ conmensurable con ella.

Digo que $\Gamma\Delta$ es «menor».

Pues hágase lo mismo (que antes); y como AE, EB son inconmensurables en cuadrado [X 76], entonces ΓZ , ΔZ son también inconmensurables en cuadrado [X 13]. Pues bien, dado que, como AE es a EB, así ΓZ a ΔZ [VI 12 y V 16], entonces, como el (cuadrado) de AE es al de EB, así también el (cuadrado) de ΓZ al de ΔZ [VI 22]. Luego, por composición, como los (cuadrados) de AE, EB son al (cuadrado) de EB, así los (cuadrados) de ΓZ , ΔZ al (cuadrado) de ΔZ [V 18]; pero el (cuadrado) de BE es conmensurable con el de ΔZ ; entonces la suma de los cuadrados de AE, EB es conmensurable con la suma de los cuadrados de ΓZ , ΔZ [V 16 y X 11]. Pero la suma de los cuadrados de AE, EB es expresable [X 76], así pues, la suma de los cuadrados de ΓZ , ΔZ es también expresable [X Def. 4]. Puesto que, a su vez, como el (cuadrado) de AE es al (rectángulo comprendido) por AE, EB, así el (cuadrado) de ΔZ al (rectángulo comprendido) por ΓZ , ΔZ , mientras que el (cuadrado) de AE es conmensurable con el cuadrado de ΓZ , entonces, el (rectángulo comprendido) por AE, EB es también conmensurable con el (rectángulo comprendido) por ΓZ , ΔZ . Pero el (rectángulo comprendido) por AE, EB es medial [X 76]; entonces el (rectángulo comprendido) por ΓZ , ΔZ es también medial [X 23 Por.]; luego ΓZ , ΔZ son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma



de sus cuadrados expresable y el (rectángulo comprendido) por ellas medial.

Por consiguiente, $\Gamma\Delta$ es «menor». Q. E. D.

PROPOSICIÓN 106

Una (recta) conmensurable con la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial es también una (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Sea AB la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial y $\Gamma\Delta$ conmensurable con ella.

Digo que $\Gamma\Delta$ es también una (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Sea, pues, BE la adjunta a AB; entonces AE, EB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de los cuadrados de AE, EB medial y el (rectángulo comprendido) por ellas expresable [X 77]. Sígase la misma construcción (que antes). Demostraríamos de manera semejante a los (teoremas) anteriores que ΓZ , $Z\Delta$ guardan la misma razón que

AE, EB y la suma de los cuadrados de AE, EB es conmensurable con la suma de los cuadrados de ΓZ , $Z\Delta$ y el (rectángulo comprendido) por AE, EB con el (rectángulo comprendido) por ΓZ , $Z\Delta$; de modo que ΓZ , $Z\Delta$ son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de los cuadrados de ΓZ , $Z\Delta$ medial y el (rectángulo comprendido) por ellas expresable.

Por consiguiente, $\Gamma\Delta$ es una (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial [X 77]. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 107

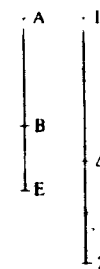
Una (recta) conmensurable con la que hace con un (área) medial un (área) entera medial es también ella misma una (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Sea AB una (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial y sea $\Gamma\Delta$ conmensurable con AB.

Digo que $\Gamma\Delta$ es también una (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Sea, pues, BE la adjunta a AB, y sígase la misma construcción; entonces AE, EB son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas también medial y además la suma de sus cuadrados inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ellas [X 78]. Ahora bien, según se ha demostrado, AE, EB son conmensurables con ΓZ , $Z\Delta$, y la suma de los cuadrados de AE, EB con la suma de los cuadrados de ΓZ , $Z\Delta$, y el (rectángulo comprendido) por AE, EB con el (rectángulo comprendido) por ΓZ , $Z\Delta$; entonces ΓZ , $Z\Delta$ son (rectas) inconmensurables en cuadrado que hacen la suma de sus cuadrados medial y el (rectángulo comprendido) por ellas también medial y además la suma de sus cuadrados inconmensurable con el (rectángulo comprendido) por ellas.

Por consiguiente, $\Gamma\Delta$ es una (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial [X 78]. Q. E. D.

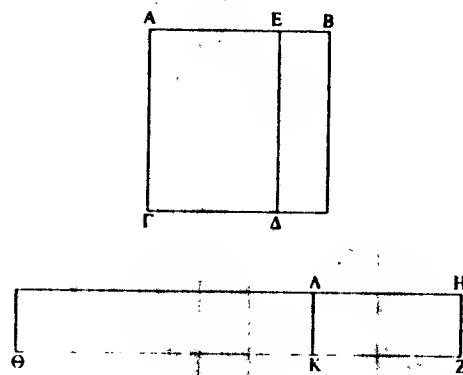


PROPOSICIÓN 108

Si de un (área) expresable se quita un (área) medial, el lado del cuadrado equivalente al área restante es una de estas dos (rectas) no expresables: o bien una apótoma o bien una «menor».

Quítese, pues, del (área) expresable $B\Gamma$ el (área) medial $B\Delta$.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al área restante $E\Gamma$ es una de estas dos (rectas) no expresables; o bien una apótoma o bien una «menor».



Pues póngase la (recta) expresable ZH , y aplíquese a ZH el paralelogramo rectángulo $H\Theta$ igual a $B\Gamma$, y quítese el (paralelogramo) HK igual a $B\Delta$; entonces el (área) restante $E\Gamma$ es igual a $\Lambda\Theta$. Pues bien, como $B\Gamma$ es expresable, mientras que $B\Delta$ es medial, y $B\Gamma$ es igual a $H\Theta$, mientras que $B\Delta$ es (igual) a HK , entonces $H\Theta$ es expresable y HK medial. Y se han aplicado a la (recta) expresable ZH ; luego $Z\Theta$ es expresable y conmensurable en longitud con ZH [X 20]; y ZK es expresable e incommensurable

ble en longitud con ZH [X 22]; por tanto, $Z\Theta$ es incommensurable en longitud con ZK [X 13]. Entonces $Z\Theta$, ZK son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego $K\Theta$ es una apótoma [X 73], y KZ la adjunta a ella. Entonces el cuadrado de ΘZ es mayor que el de ZK en el (cuadrado) de una (recta) o conmensurable con (ΘZ) o no.

Sea, en primer lugar, su cuadrado mayor en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable. Ahora bien, la (recta) entera ΘZ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ZH ; luego $K\Theta$ es una primera apótoma [X Ter. Def. 1]. Pero el lado del cuadrado equivalente al (rectángulo comprendido) por una (recta) expresable y una primera apótoma, es una apótoma [X 91]. Luego el lado del cuadrado equivalente a $\Lambda\Theta$, es decir a $E\Gamma$, es una apótoma.

Pero si el cuadrado de ΘZ es mayor que el de ZK en el (cuadrado) de una (recta) incommensurable con ella (ΘZ) y la (recta) entera $Z\Theta$ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ZH , $K\Theta$ es una cuarta apótoma [X Ter. def. 4]. Y el lado del cuadrado equivalente al (rectángulo comprendido) por una (recta) expresable y una cuarta apótoma es una (recta) «menor» [X 92]. Q. E. D.

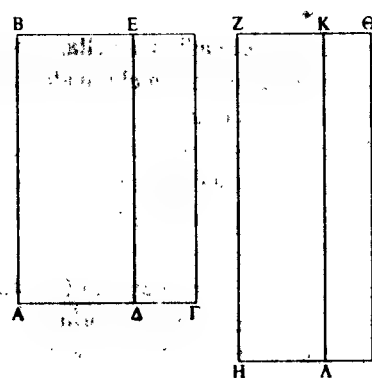
PROPOSICIÓN 109

Si se quita de un (área) medial un (área) expresable, resultan otras dos rectas no expresables: o bien la primera apótoma de una medial, o bien la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

Quítese, pues, del (área) medial $B\Gamma$ el (área) expresable $B\Delta$.

Digo que el lado del cuadrado equivalente al (área) restante $E\Gamma$ es una de estas dos (rectas) no expresables, o bien la prime-

ra apótoma de una medial, o bien la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.



Pues bien, póngase la (recta) expresable ZH y aplíquense las áreas de manera semejante (a los teoremas precedentes). Ahora, en consecuencia, ZΘ es expresable e incommensurable en longitud con ZH, mientras que KZ es expresable y commensurable en longitud con ZH; entonces ZΘ, ZK son (rectas) expresables commensurables sólo en cuadrado [X 13], luego KΘ es una apótoma y ZK la adjunta a ella [X 73]. Así pues, el cuadrado de ΘZ es mayor que el de ZK o bien en el (cuadrado) de una (recta) commensurable con (ΘZ) o bien en el de una incommensurable con ella.

Pues bien, si el cuadrado de ΘZ es mayor que el de ZK en el (cuadrado) de una (recta) commensurable con ella (ΘZ), y la adjunta a ella, ZK, es commensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ZH, KΘ es una segunda apótoma [X Ter. Def. 2]. Pero ZH es expresable; de modo que el lado del cuadrado equivalente al (área) ΛΘ, es decir a EF, es la primera apótoma de una medial [X 92].

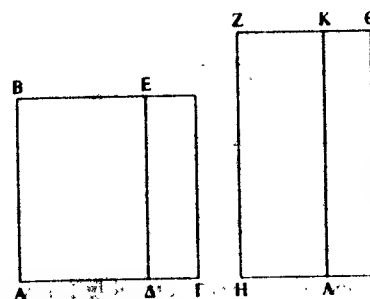
Pero si el cuadrado de ΘZ es mayor que el de ZK en el (cuadrado) de una (recta) incommensurable, y la (recta) adjun-

ta ZK es commensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ZH, KΘ es una quinta apótoma [X Ter. Def. 5]; de modo que el lado del cuadrado equivalente a EF es la (recta) que hace con un (área) expresable un (área) entera medial [X 95] Q. E. D.

PROPOSICIÓN 110

Si se quita de un (área) medial otra (área) medial incommensurable con el (área) entera, resultan las dos (rectas) no expresables restantes: o bien la segunda apótoma de una medial o bien la que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Quítese, pues, como en las construcciones anteriores, del (área) medial BΓ, el (área) medial BΔ incommensurable con el (área) entera.



Digo que el lado del cuadrado equivalente al (área) EF es una de estas dos (rectas) no expresables, o bien la segunda apótoma de una medial, o bien la que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

Pues como cada una de las (áreas) BΓ, BΔ es medial, y BΓ es incommensurable con BΔ, en consecuencia, cada una de las dos

(rectas) $Z\Theta$, ZK será expresable e inconmensurable en longitud con ZH [X 22]. Y puesto que $B\Gamma$ es inconmensurable con BA , es decir $H\Theta$ con HK , ΘZ es también inconmensurable con ZK [VI 1 y X 11]; luego $Z\Theta$, ZK son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, $K\Theta$ es una apótoma [X 73].

Ahora bien, si el cuadrado de $Z\Theta$ es mayor que el de ZK en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella ($Z\Theta$) y ninguna de las (rectas) $Z\Theta$, ZK es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta ZH , $K\Theta$ es una tercera apótoma [X Ter. Def. 3]. Pero $K\Lambda$ es expresable, y el (rectángulo comprendido) por una (recta) expresable y una tercera apótoma no es expresable, y el lado del cuadrado equivalente a él tampoco es expresable y se llama segunda apótoma de una medial [X 93]; de modo que el lado del cuadrado equivalente a $\Lambda\Theta$, es decir a $E\Gamma$, es una segunda apótoma de una medial.

Pero si el cuadrado de $Z\Theta$ es mayor que el de ZK en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella ($Z\Theta$) y ninguna de las (rectas) ΘZ , ZK es conmensurable en longitud con ZH , $K\Theta$ es una sexta apótoma [X Ter. Def. 6]. Pero el lado del cuadrado equivalente al (rectángulo comprendido) por una (recta) expresable y una sexta apótoma es la (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial [X 96].

Por consiguiente, el lado del cuadrado equivalente a $\Lambda\Theta$, es decir a $E\Gamma$, es una (recta) que hace con un (área) medial un (área) entera medial. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 111

La apótoma no es la misma que la binomial.

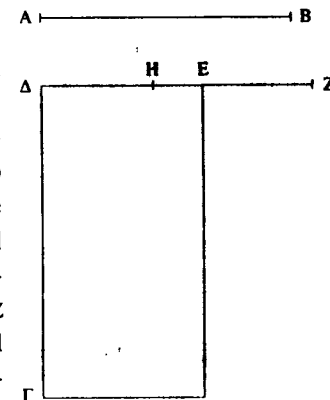
Sea AB una apótoma.

Digo que AB no es la misma que una binomial.

Pues, si es posible séalo. Póngase la (recta) expresable $\Delta\Gamma$, y aplíquese a $\Gamma\Delta$ el rectángulo ΓE igual al (cuadrado) de AB produciendo la anchura ΔE . Pues bien, como AB es una apótoma, ΔE es una primera apótoma [X 97]. Sea EZ la adjunta a ella; entonces ΔZ , ZE son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado, y el cuadrado de ΔZ es mayor que el de ZE en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ΔZ), y ΔZ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta $\Delta\Gamma$ [X Ter. Def. 1].

Como, a su vez, AB es una binomial, entonces ΔE es una primera binomial [X 60]. Divídase en sus términos por el punto H , y sea ΔH el término mayor; entonces ΔH , HE son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado y el (cuadrado) de ΔH es mayor que el de HE en el cuadrado de una (recta) conmensurable con ella (ΔH), mientras que el (término) mayor ΔH es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta $\Delta\Gamma$ [X Seg. Def. 1]. Luego ΔZ es conmensurable en longitud con ΔH [X 12]; por tanto, la (recta) restante HZ es también conmensurable en longitud con ΔZ [X 15]. Pero ΔZ es inconmensurable en longitud con EZ ; entonces ZH es también inconmensurable en longitud con EZ [X 13]. Luego HZ , ZE son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto EH es una apótoma [X 73]. Pero también es expresable; lo cual es imposible.

Por consiguiente, la apótoma no es la misma que la binomial. Q. E. D.



La apótoma y las (rectas) no expresables subsiguientes no son las mismas que la medial ni entre sí.

Pues el cuadrado de una medial, aplicado a una recta expresable, produce como anchura una (recta) expresable incommensurable en longitud con aquella a la que se ha aplicado [X 22], mientras que el cuadrado de una apótoma, aplicado a una recta expresable, produce como anchura una primera apótoma [X 97], y el (cuadrado) de la primera apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una segunda apótoma [X 98], mientras que el (cuadrado) de la segunda apótoma de una medial, aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una tercera apótoma [X 99]; pero el (cuadrado) de una «menor», aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una cuarta apótoma [X 100]; y el cuadrado de la que hace con un (área) expresable un (área) entera medial, aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una quinta apótoma [X 101], mientras que el cuadrado de la que hace con un (área) medial un (área) entera medial, aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura una sexta apótoma [X 102].

Pues bien, puesto que las antedichas anchuras difieren de la primera y entre sí, de la primera porque es expresable y entre sí porque no son del mismo orden, es evidente que también las propias (rectas) no expresables difieren entre sí. Y como se ha demostrado que la apótoma no es la misma que la binomial [X 111], sino que, aplicadas a una recta expresable, las subsiguientes a la apótoma producen como anchuras apótomas, cada una de acuerdo con su orden, mientras que las subsiguientes a la binomial (producen) como anchuras binomiales de acuerdo con su propio orden, entonces, las subsiguientes a la apótoma son diferentes y las subsiguientes a la binomial son diferentes, de modo que hay en la serie trece rectas no expresables en total:

Medial.

Binomial.

Primera bimedial.

Segunda bimedial.

«Mayor».

Lado del cuadrado equivalente a un (área) expresable más una medial.

Lado del cuadrado equivalente a dos (áreas) mediales.

Apótoma.

Primera apótoma de una medial.

Segunda apótoma de una medial.

«Menor».

La que hace con un (área) expresable un (área) entera medial.

La que hace con un (área) medial un (área) entera medial.

[PROPOSICIÓN 112⁴²

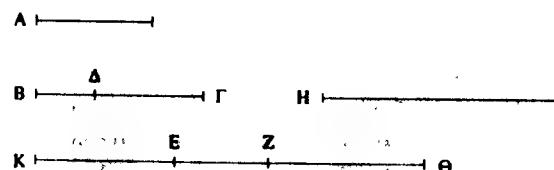
El cuadrado de una (recta) expresable, aplicado a una binomial produce como anchura una apótoma cuyos términos son commensurables con los términos de la binomial y además guardan la misma razón y la apótoma resultante es del mismo orden que la binomial.

Sea A la (recta) expresable y BG la binomial cuyo término mayor es $\Delta\Gamma$, y sea el (rectángulo comprendido) por BG, EZ igual al (cuadrado) de A.

⁴² Heiberg considera esta proposición y las siguientes hasta el final del libro X una interpolación anterior a Teón.

Estas proposiciones (112-115) aparecen después de la recapitulación de los trece tipos de rectas no expresables de la clasificación general que podría ser

Digo que EZ es una apótoma cuyos términos son conmensurables con $\Gamma\Delta$, ΔB y guardan la misma razón y además EZ es del mismo orden que $B\Gamma$.



Pues sea a su vez el (rectángulo comprendido) por $B\Delta$, H igual al (cuadrado) de A . Pues bien, puesto que el (rectángulo comprendido) por $B\Gamma$, EZ es igual al (rectángulo comprendido) por $B\Delta$, H , entonces, como ΓB es a $B\Delta$, así H a EZ [VI 16]. Pero ΓB es mayor que $B\Delta$; entonces H es mayor que EZ [VI 16, V 14]. Sea $E\Theta$ igual a H ; entonces, como ΓB es a $B\Delta$, así ΘE a EZ ; luego, por separación, como $\Gamma\Delta$ es a $B\Delta$, así ΘZ a ZE [V 17]. Y hágase de forma que como ΘZ es a ZE , así ZK a KE ; entonces la (recta) entera ΘK es a la (recta) entera KZ , como ZK es a KE , porque como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes a todos los consecuentes [V 12]. Pero como ZK es a KE , así $\Gamma\Delta$ a ΔB [V 11]; entonces, como ΘK es a KZ , así también $\Gamma\Delta$ es a ΔB [id.]. Pero el (cuadrado) de $\Gamma\Delta$ es

la conclusión del libro. No tienen relación con el resto del tratamiento de los trece tipos de rectas sin razón expresable y no se usan en los libros posteriores sobre geometría de sólidos.

112-115 parecen ser el germen de un nuevo estudio sobre las rectas sin razón expresable. 115 en particular amplía el número de sus diferentes tipos. Tienen visos de ser un conjunto de teoremas antiguos que Heiberg piensa que pueden atribuirse a Apolonio, aunque no sean genuinos. Heath considera, sin embargo, que 112-114 tienen relación con las precedentes: X 111 muestra que una recta binomial no puede ser también una apótoma, mientras que X 112-114 ponen de manifiesto cómo cada una de ellas se puede usar para convertir la otra en expresable.

conmensurable con el (cuadrado) de ΔB [X 36]; luego el (cuadrado) de ΘK es también conmensurable con el (cuadrado) de KZ [VI 22; X 11]. Ahora bien, como el cuadrado de ΘK es al (cuadrado) de KZ , así ΘK a KE , puesto que las tres (rectas) ΘK , KZ , KE son proporcionales [V Def. 9]. Por tanto, ΘK es conmensurable en longitud con KE ; de modo que ΘE es también conmensurable en longitud con EK [X 15]. Y puesto que el cuadrado de A es igual al (rectángulo comprendido) por $E\Theta$, $B\Delta$, y el cuadrado de A es expresable, entonces el (rectángulo comprendido) por $E\Theta$, $B\Delta$ es también expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable $B\Delta$; entonces $E\Theta$ es una (recta) expresable conmensurable en longitud con $B\Delta$ [X 20], de modo que EK , al ser conmensurable con ella, es también expresable y conmensurable en longitud con $B\Delta$. Pues bien, dado que, como $\Gamma\Delta$ es a ΔB , así ZK a KE , mientras que $\Gamma\Delta$, ΔB son conmensurables sólo en cuadrado, ZK , KE son también conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Pero KE es expresable, luego ZK es también expresable. Por tanto, ZK , KE son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Así pues, EZ es una apótoma [X 73].

Ahora bien, el cuadrado de $\Gamma\Delta$ es mayor que el de ΔB en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ($\Gamma\Delta$) o en el de una inconmensurable con ella.

Pues bien, si el cuadrado de $\Gamma\Delta$ es mayor que el de ΔB en el cuadrado de una (recta) conmensurable, también el cuadrado de ZK es mayor que el de KE en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (ZK) [X 14]. Y si $\Gamma\Delta$ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, también ZK lo es [X 11 y 12], pero si lo es $B\Delta$, también KE [X 12]; y si no lo es ninguna de las dos (rectas) $\Gamma\Delta$, ΔB , tampoco (lo será) ninguna de las dos (rectas) ZK , KE .

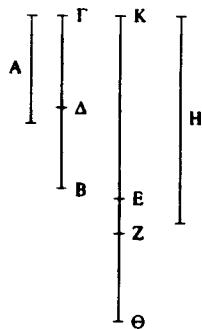
Ahora bien, si el cuadrado de $\Gamma\Delta$ es mayor que el de ΔB en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella ($\Gamma\Delta$), también el cuadrado de ZK será mayor que el de KE en el cua-

drado de una (recta) inconmensurable con ella (ZK) [X 14]. Y si $\Gamma\Delta$ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, también ZK lo es; pero si lo es $B\Delta$, también KE, y si ninguna de las dos (rectas) $\Gamma\Delta$, ΔB lo es, tampoco lo será ninguna de las (rectas) ZK, KE; de modo que ZE es una apótoma cuyos términos ZK, KE son conmensurables con los términos $\Gamma\Delta$, ΔB de la binomial y guardan la misma razón; y (ZE) es del mismo orden que B Γ . Q. E. D.

PROPOSICIÓN 113

El cuadrado de una (recta) expresable, aplicado a una apótoma, produce como anchura una (recta) binomial cuyos términos son conmensurables con los términos de la apótoma y guardan la misma razón, y además la binomial resultante es del mismo orden que la apótoma.

Sea, pues, A la recta expresable y $B\Delta$ la apótoma, y sea el (rectángulo comprendido) por $B\Delta$, K Θ igual al (cuadrado) de A, de modo que el (cuadrado) de la (recta) expresable A, aplicado a la apótoma $B\Delta$ produce la anchura K Θ .



Digo que K Θ es una binomial cuyos términos son conmensurables con los términos de $B\Delta$ y guardan la misma razón, y además K Θ es del mismo orden que $B\Delta$.

Pues sea $\Delta\Gamma$ la (recta) adjunta a $B\Delta$; entonces B Γ , $\Gamma\Delta$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado [X 73]. Y sea el (rectángulo comprendido) por B Γ , H igual al (cuadrado) de A. Pero el (cuadrado) de A es expresable; entonces el

(rectángulo comprendido) por B Γ , H es también expresable. Y se ha aplicado a la (recta) expresable B Γ ; luego H es expresable y conmensurable en longitud con B Γ [X 20]. Pues bien, como el (rectángulo comprendido) por B Γ , H es igual al (rectángulo comprendido) por $B\Delta$, K Θ , entonces, proporcionalmente, como ΓB es a $B\Delta$, así K Θ a H [VI 16]. Pero B Γ es mayor que $B\Delta$, entonces K Θ es mayor que H [VI 16 y V 14]. Hágase KE igual a H; entonces KE es conmensurable en longitud con B Γ . Ahora bien, dado que como ΓB es a $B\Delta$, así ΘK a KE, entonces, por conversión, como B Γ es a $\Gamma\Delta$, así K Θ a ΘE [V 19 Por.]. Hágase de forma que como K Θ es a ΘE , así ΘZ a ZE; entonces la (recta) restante KZ es a Z Θ como K Θ es a ΘE , es decir, como B Γ a $\Gamma\Delta$ [V 19]. Pero B Γ , $\Gamma\Delta$ son conmensurables sólo en cuadrado [X 11]. Luego también KZ, Z Θ son conmensurables sólo en cuadrado. Y dado que, como K Θ es a ΘE , KZ es a Z Θ , mientras que, como K Θ es a ΘE , ΘZ a ZE, entonces, como KZ es a Z Θ , ΘZ a ZE [V 11]; de modo que también como la primera es a la tercera, el (cuadrado) de la primera es al (cuadrado) de la segunda [V Def. 9]; luego también, como KZ es a ZE, así el (cuadrado) de KZ al (cuadrado) de ZE. Pero el (cuadrado) de KZ es conmensurable con el (cuadrado) de ZE, porque KZ, ZE son conmensurables en cuadrado; entonces KZ es también conmensurable en longitud con ZE [X 11]; de modo que KZ es también conmensurable en longitud con KE [X 15]. Pero KE es expresable y conmensurable en longitud con B Γ ; entonces, KZ también será expresable y conmensurable en longitud con B Γ [X 12]. Y puesto que, como B Γ es a $\Gamma\Delta$, así KZ a Z Θ , por alternancia, como B Γ es a KZ, así $\Delta\Gamma$ a Z Θ [V 16]. Pero B Γ es conmensurable con KZ; así pues, Z Θ es conmensurable en longitud con $\Gamma\Delta$ [X 11]. Pero B Γ , $\Gamma\Delta$ son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; luego KZ, Z Θ son (rectas) expresables [X Def. 3] conmensurables sólo en cuadrado; por tanto K Θ es binomial.

Pues bien, si el cuadrado de $B\Gamma$ es mayor que el de $\Gamma\Delta$ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella ($B\Gamma$), también el (cuadrado) de KZ será mayor que el de $Z\Theta$ en el (cuadrado) de una (recta) conmensurable con ella (KZ) [X 14]. Y si $B\Gamma$ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, también KZ lo será, pero si $\Gamma\Delta$ es conmensurable con la (recta) expresable propuesta, también $Z\Theta$ (lo será), y si ninguna de las (rectas) $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ lo es, ninguna de las (rectas) KZ , $Z\Theta$ (lo será).

Ahora bien, si el cuadrado de $B\Gamma$ es mayor que el de $\Gamma\Delta$ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella ($B\Gamma$), el (cuadrado) de KZ será también mayor que el de $Z\Theta$ en el (cuadrado) de una (recta) inconmensurable con ella (KZ) [X 14]. Y si $B\Gamma$ es conmensurable en longitud con la (recta) expresable propuesta, KZ también (lo será), pero si lo es $\Gamma\Delta$, $Z\Theta$ también (lo será), y si ninguna de las (rectas) $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ (lo es), ninguna de las (rectas) KZ , $Z\Theta$ lo será.

Por consiguiente, $K\Theta$ es una binomial cuyos términos KZ , $Z\Theta$ son conmensurables con los términos $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ de la apótoma, y guardan la misma razón y además $K\Theta$ es del mismo orden que $B\Gamma$. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 114

Si un área está comprendida por una apótoma y una binomial cuyos términos son conmensurables con los términos de la apótoma y guardan la misma razón, el lado del cuadrado equivalente al área es expresable.

Sea, pues, comprendida el área AB , $\Gamma\Delta$ por la apótoma AB y la binomial $\Gamma\Delta$ cuyo término mayor sea ΓE , y sean los términos de la binomial ΓE , $E\Delta$ conmensurables con los términos de la

apótoma AZ , ZB y guarden la misma razón, y sea H el lado del cuadrado equivalente al (rectángulo comprendido) por AB , $\Gamma\Delta$.

Digo que H es expresable.

Pues póngase la (recta) expresable Θ , y aplíquese a $\Gamma\Delta$ un (paralelogramo) igual al (cuadrado) de Θ produciendo la anchura $K\Lambda$; entonces $K\Lambda$ es una apótoma; sean sus términos KM , $M\Lambda$ conmensurables con los términos ΓE , $E\Delta$ de la binomial y guarden la misma razón [X 112].

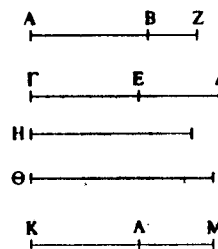
Pero ΓE , $E\Delta$ son también conmensurables con AZ , ZB y guardan la misma razón. Entonces, como AZ es a ZB , así KM a $M\Lambda$. Luego, por alternancia, como AZ es a KM , así BZ a ΛM ; por tanto, la (recta) restante AB es a la (recta) restante $K\Lambda$ como AZ es a KM [V 19].

Pero AZ es conmensurable con KM [X 12]; entonces AB es también conmensurable con $K\Lambda$ [X 11].

Ahora bien, como AB es a $K\Lambda$, así el (rectángulo comprendido) por $\Gamma\Delta$, AB al (rectángulo comprendido) por $\Gamma\Delta$, $K\Lambda$ [VI 1]. Luego el (rectángulo comprendido) por $\Gamma\Delta$, AB es conmensurable también con el (rectángulo comprendido) por $\Gamma\Delta$, $K\Lambda$ [X 11].

Pero el (rectángulo comprendido) por $\Gamma\Delta$, $K\Lambda$ es igual al (cuadrado) de Θ ; así pues, el (rectángulo comprendido) por $\Gamma\Delta$, AB es conmensurable con el (cuadrado) de Θ . Pero el (rectángulo comprendido) por $\Gamma\Delta$, AB es igual al (cuadrado) de H ; entonces el (cuadrado) de H es conmensurable con el (cuadrado) de Θ . Pero el (cuadrado) de Θ es expresable, luego el cuadrado de H es expresable. Por tanto, H es expresable. Y es el lado del cuadrado equivalente al (rectángulo comprendido) por $\Gamma\Delta$, AB .

Por consiguiente, si un área está comprendida por una apótoma y una binomial cuyos términos son conmensurables con



los términos de la apótoma y guardan la misma razón, el lado del cuadrado equivalente al área es expresable.

Porisma:

Y por eso también nos queda claro lo siguiente: que es posible que un área expresable esté comprendida por rectas no expresables. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 115

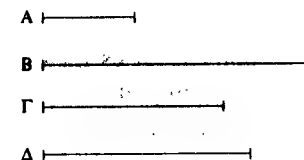
A partir de una (recta) medial se produce un número infinito de (rectas) no expresables y ninguna de ellas es la misma que ninguna de sus predecesoras.

Sea, pues, A una (recta) medial.

Digo que, a partir de A se produce un número infinito de rectas no expresables y que ninguna de ellas es la misma que una de sus predecesoras.

Pues póngase la (recta) expresable B, y sea el cuadrado de Γ igual al (rectángulo comprendido) por B, A; entonces Γ no es expresable [X Def. 4]; porque un (área) comprendida por una (recta) expresable y una (recta) no expresable es un (área) no expresable [Deduc. de X 20]. Y no es la misma que ninguna de sus predecesoras

porque ninguno de los cuadrados de las predecesoras aplicado a una (recta) expresable produce como anchura una (recta) medial. Sea, a su vez, el (cuadrado) de Δ igual al (rectángulo comprendido) por B, Γ ; entonces el (cuadrado) de Δ no es expresable [Deduc. de X 20]. Luego Δ es una (recta) no expresable [X Def. 4]; y no es la misma que ninguna de sus predecesoras, porque ninguno de los cuadrados de las predecesoras



ras aplicado a una (recta) expresable, produce como anchura Γ . De manera semejante, entonces, avanzando en la serie *ad infinitum* queda claro que, a partir de una (recta) medial se produce un número infinito de (rectas) no expresables y ninguna es la misma que una de sus predecesoras. Q. E. D.]

LIBRO UNDÉCIMO

DEFINICIONES

1. Un sólido es lo que tiene longitud, anchura y profundidad⁴³.

⁴³ La definición de sólido es tradicional. La palabra *stereón* «sólido», es un adjetivo que, en geometría, hace referencia a *sôma*, «cuerpo», o *skhêma*, «figura».

PLATÓN, en *Menón* 76a, «una figura es aquello que limita lo sólido», parece identificar *stereon* con *sôma*, mientras que en Euclides se identifica con *skhêma*. En *Sofista* 235d habla de producir una imitación teniendo en cuenta las proporciones del modelo en largo, ancho y profundo. En *Leyes* 817e coloca entre los tres *mathêmata* el arte de medir longitud, profundidad y anchura. Según MUGLER (*Dictionnaire de la terminologie géométrique des grecs*, op. cit., pág 93) Platón se refiere a la tercera dimensión de tres formas: *báthous aúksē*, *trítē aúksē*, *ôn kýbō aúksē*. Por otra parte, la palabra *báthos* «profundidad» se aplica en Platón tanto al cuerpo sólido como a la tercera dimensión: *Rep.* 528d «después de la geometría, hablé de la astronomía que implica movimiento de un sólido (*báthous*).

Aristóteles, por su parte, en *Metafísica* 1020a 11-14 dice: «lo continuo en una dirección es longitud, en dos direcciones anchura y en tres profundidad... longitud es una línea, anchura una superficie, profundidad un cuerpo» identificando *báthos* con *sôma*. En *Tópicos* VI 5, 142b 24 «un cuerpo es lo que tiene tres dimensiones» (*diastáseis*). En *Metafísica* 1066b32 «lo que tiene dimensión por todas partes».

2. Y el extremo de un sólido es una superficie.
3. Una recta es ortogonal a un plano cuando forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y que están en el plano ⁴⁴.
4. Un plano es ortogonal a un plano cuando las rectas trazadas en uno de los planos formando ángulos rectos con la sección común de los (dos) planos forman ángulos rectos con el plano restante.
5. Cuando desde el extremo de una recta elevado sobre un plano se traza una perpendicular al plano y se traza otra recta desde el punto que resulta hasta el extremo (que está) en el plano de la (primera) recta, el ángulo comprendido por la recta así trazada y la (que está) sobre el plano es la inclinación de la recta con respecto al plano ⁴⁵.
6. La inclinación de un plano con respecto a un plano es el ángulo agudo comprendido por las (rectas) trazadas a un mismo punto formando ángulos rectos con la sección común en cada uno de los planos ⁴⁶.

Herón (Def. 11) combina las dos formas de definir un sólido: «un cuerpo sólido es el que tiene longitud, anchura y profundidad o el que cuenta con las tres dimensiones».

Teón (pág. 111, 19, ed. Hiller) dice: «lo que es extensible y divisible en tres direcciones es un sólido, que tiene longitud, anchura y profundidad».

⁴⁴ Euclides establece una diferencia entre *orthé* «ortogonal», término utilizado para el caso de rectas (o planos) que forman ángulos rectos con un plano, y *prós orthás*, empleado para rectas que forman ángulos rectos con otras rectas en un plano. El término *káthetos*, «perpendicular», se utiliza de un modo más generalizado.

Herón (Def. 115) adopta esta definición y la siguiente casi con las mismas palabras.

Se establece en XI 4 el hecho de que una recta pueda relacionarse con un plano de la forma que se describe en esta definición.

⁴⁵ En suma, se trata del ángulo de la recta con su proyección en el plano.

⁴⁶ Hoy en día hablaríamos de ángulo diedro.

7. Se dice que un plano se inclina sobre un plano de manera semejante a como otro se inclina sobre otro, cuando dichos ángulos de inclinación son iguales entre sí.
8. Planos paralelos son los no concurrentes ⁴⁷.
9. Figuras sólidas semejantes son las comprendidas por planos semejantes iguales en número.
10. Figuras sólidas iguales y semejantes son las comprendidas por planos semejantes iguales en número y tamaño ⁴⁸.
11. Un ángulo sólido es la inclinación de más de dos líneas que se tocan entre sí y no están en la misma superficie con respecto a todas las líneas.
O de otra forma: un ángulo sólido es el comprendido por más de dos ángulos planos contruidos en el mismo punto, sin estar en el mismo plano.
12. Una pirámide es una figura sólida comprendida por planos, construida desde un plano a un punto.

⁴⁷ Herón (115) presenta la misma definición de planos paralelos. El término *asýmptōtos* «no concurrente» se ha utilizado posteriormente para las asíntotas de curvas.

⁴⁸ Simson discute la autenticidad de esta definición por dos razones:

En primer lugar, dice que no es una definición sino un teorema que debe ser probado por el método de la superposición o de alguna otra manera, por tanto no debía haberse colocado entre las definiciones. En segundo lugar, porque es falsa, según demuestra con un ejemplo (Cf. SIMSON, *ed. cit.*, págs. 339-41). Considera, entonces, que esta definición ha sido interpolada por Teón o algún otro editor.

Legendre comparte las objeciones de Simson y las amplía a la definición 9 (Cf. HEATH, *op. cit.*, III, págs. 266-67).

Heath sin embargo piensa que las definiciones 9 y 10 se refieren únicamente a figuras compuestas por ángulos sólidos triédricos y en este caso, que es el único que Euclides tiene en cuenta, sus afirmaciones son «verdaderas y admisibles».

Herón define las figuras sólidas semejantes como aquellas que están comprendidas por planos semejantes y situados de manera semejante. En recuerdo del principio de «caridad» que Donald Davidson postula en el mundo de la interpretación, conviene entender que se refiere a poliedros convexos.

13. Un prisma es una figura sólida comprendida por planos dos de los cuales, los opuestos, son iguales, semejantes y paralelos, mientras que los demás son paralelogramos.
14. Cuando, permaneciendo fijo el diámetro de un semicírculo, se hace girar el semicírculo y se vuelve de nuevo a la misma posición desde donde empezó a moverse, la figura comprendida es una esfera ⁴⁹.
15. Y el eje de la esfera es la recta que permanece fija en torno a la que gira el semicírculo.
16. Y el centro de la esfera es el mismo que el del semicírculo.
17. Y diámetro de la esfera es cualquier recta trazada a través del centro y limitada en ambas direcciones por la superficie de la esfera.
18. Cuando, permaneciendo fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un triángulo rectángulo, se hace girar el triángulo y se vuelve de nuevo a la posición desde donde empezó a moverse, la figura comprendida es un cono. Y si la recta que permanece fija es igual a la restante del ángulo recto, el cono será rectán-

⁴⁹ Como hace notar el escoliasta, no se trata de una definición propiamente dicha, sino de la descripción del modo de generar una esfera. Pero Euclides define de esta forma la esfera porque utilizará este modo de concebirla en las últimas proposiciones del libro XIII para probar que los vértices de los poliedros regulares tocan la superficie de las esferas que los circunscriben. De hecho, prueba que los vértices de dichas figuras tocan los semicírculos descritos sobre ciertos diámetros de las esferas.

La noción definitoria no genética de esfera es antigua. En ARISTÓTELES, la característica propia de la esfera es que sus extremos distan lo mismo del centro (*Acerca del cielo* II, 14, 297a 24). Herón usa la misma fórmula que Euclides utiliza para definir el círculo: «Una esfera es una figura sólida limitada por una superficie tal que todas las rectas que caen en ella desde un punto interior de la figura son iguales entre sí».

- gulo, y si es menor obtusángulo y si es mayor acutángulo.
19. Y el eje del cono es la recta que permanece fija en torno a la que gira el triángulo.
 20. Y la base, el círculo descrito por la recta que gira.
 21. Cuando, permaneciendo fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un paralelogramo rectángulo, se hace girar el paralelogramo y vuelve de nuevo a la misma posición desde donde empezó a moverse, la figura comprendida es un cilindro.
 22. Y el eje del cilindro es la recta que permanece fija en torno a la que gira el paralelogramo.
 23. Y las bases son los círculos descritos por los dos lados opuestos que giran.
 24. Conos y cilindros semejantes son aquellos cuyos ejes y diámetros de las bases son proporcionales.
 25. Un cubo es la figura sólida comprendida por seis cuadrados iguales.
 26. Un octaedro es una figura sólida comprendida por ocho triángulos iguales y equiláteros.
 27. Un icosaedro es la figura sólida comprendida por veinte triángulos iguales y equiláteros.
 28. Un dodecaedro es la figura sólida comprendida por doce pentágonos iguales equiláteros y equiángulos ⁵⁰.

⁵⁰ Con estas definiciones del libro XI entramos en el último campo temático de los *Elementos*: la geometría del espacio. El interés de los matemáticos griegos por la geometría de los sólidos («cuerpos» o «figuras») responde a diversas fuentes de inspiración y de desarrollo. Unas podrían decirse más bien «externas» —en nuestra perspectiva profesionalizada de las matemáticas que nos hace ver demarcaciones entre los miembros de esta familia (e. g. entre geometría y astronomía, entre aritmética y música), que los antiguos griegos no solían marcar—; las otras más bien «internas». Entre las fuentes «externas» cuentan ciertas ideas cosmológicas, en particular la tradición que consideraba

PROPOSICION I

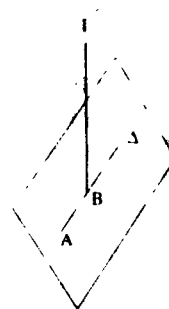
No cabe que una parte de una línea recta esté en el plano de referencia y otra parte en un plano más elevado.

Pues, si fuera posible, esté la parte AB de la línea recta ABΓ en el plano de referencia y la otra parte BΓ en un plano más elevado.

los sólidos regulares como encarnación o figura de los «cuerpos cósmicos». En este sentido, es elocuente la conjetura del *Timeo* de Platón acerca de las correspondencias entre los cuatro primeros sólidos y las partículas de los cuatro elementos, es decir: entre la pirámide o tetraedro y el fuego; el cubo o hexaedro y la tierra; el octaedro y el aire; el icosaedro y el agua (*Timeo*, 55e-56b); para colmo, el dodecaedro podía ser la figura del universo mismo. Una tradición neopitagórica, de la que se hace eco Aecio (*Placita*, II 6, 5), atribuye a Pitágoras tanto el conocimiento de los cinco poliedros como su asociación a los elementos y al conjunto del cosmos —raro poder de presciencia el de este Pitágoras, capaz de conocer cosas para las que aún no existen condiciones de conocimiento (e. g. la investigación sobre inconmensurables que subyace en la construcción de los poliedros, en particular del dodecaedro; la «teoría de los elementos» de Empédocles)—. El escolio 1.º del libro XIII pretende, a su vez, que la pirámide, el cubo y el dodecaedro ya habían atraído la atención de los pitagóricos, mientras que el octaedro y el icosaedro habían sido estudiados por Teeteto. Es una pretensión más sensata, pero ambigua, al menos en la medida en que pasa por alto la diferencia entre el hallazgo o el interés por ciertas figuras y la construcción geométrica de los poliedros sobre la base teórica pertinente. En este sentido, fueran cuales fueran los motivos filosóficos o estéticos pitagóricos, la conversión de los poliedros regulares en un asunto geométrico parece deberse sobre todo al trabajo de matemáticos como Teeteto —a quien, por cierto, *Suda* atribuye un escrito sobre estos cinco sólidos (edic. Ginebra, 1619; I 1295, 1-5)—. También revisten especial importancia los planteamientos astronómicos, asociados a modelos cosmológicos, que guiaban el estudio de la geometría esférica. Un hito preeuclídeo singular en esta línea es *La esfera en movimiento* de Autólico de Pitania, el primer tratado matemático-científico griego que hoy se conserva (cf. edic. G. AUIAC, París, 1979). Entre las fuentes

Entonces habrá en el plano de referencia una recta que continúe a AB; sea BΔ, entonces AB es un segmento común de las dos rectas ABΓ, ABΔ; lo cual es imposible teniendo en cuenta que, si describiéramos un círculo con el centro B y la distancia AB, los diámetros cortarían circunferencias desiguales del círculo.

Por consiguiente, no cabe que una parte de una línea recta esté en el plano de referencia y otra parte en el plano más elevado. Q. E. D.⁵¹



o motivos más «internos» cabe mencionar la investigación de medias proporcionales (cf. *Timeo*, 31c-32b), al calor de antiguos problemas como el de la duplicación del cubo, el análisis de magnitudes no expresables racionalmente emprendido por Teeteto y desarrollado en el libro X; los estudios sobre sólidos, como los resultados de Demócrito y de Eudoxo que recuerda Arquímedes y se hallan reflejados en el libro XII (e. g., en las proposiciones 2, 7, 10, 18).

El planteamiento de Euclides es una muestra elocuente no sólo de la madurez de esta tradición clásica de la geometría griega (la tradición Teeteto-Eudoxo), sino de las limitaciones de la matemática griega a la hora de explicitar ciertos supuestos. Euclides, por ejemplo, tiende a pasar del modo más tácito y natural desde los resultados acerca de un plano hasta la solución de problemas que envuelven más de un plano: la geometría de los sólidos no parece requerir ni postulados específicos, ni la explicitación de su relación con la anterior geometría plana. En consecuencia, no aparecen especificadas en los *Elementos* las relaciones entre planos y puntos, planos y líneas, planos y planos. Pero la limitación más sustancial es la de una geometría del espacio que carece de una noción propia y expresa de espacio geométrico —en curioso contraste con la preocupación del pensamiento griego por el espacio cosmológico o por el lugar físico, cf. «Introducción general», *Elementos. Libros I-IV*, págs. 97, 108-110. Por lo demás, esa carencia del debido nivel de abstracción conceptual mal puede suplirse con la mera indicación del carácter tridimensional de las figuras que se van a tratar en este nuevo campo temático.

⁵¹ «Plano de referencia» recoge los dos sentidos posibles del griego *tò hypokeiménon epípedon*: a) el plano que está debajo con respecto a otro más elevado *meteórōteron*, y b) el plano dado o acordado.

Por otra parte, HEATH (*op. cit.*, pág. 272) hace notar que las pruebas de las

PROPOSICIÓN 2

Si dos rectas se cortan una a otra están en un plano, y todo triángulo está en un plano.

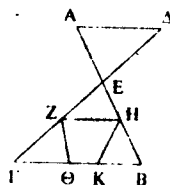
Córtense, pues, las dos rectas AB , ΓA en el punto E .

Digo que AB , ΓA están en un plano y todo triángulo está en un plano.

Pues tómense al azar los puntos Z , H en $E\Gamma$, EB y trácense $Z\Gamma$, ZH , y trácense entre ellas $Z\Theta$, HK .

Digo en primer lugar que el triángulo $E\Gamma B$ está en un plano.

Pues si una parte del triángulo $E\Gamma B$, sea $Z\Theta\Gamma$ o sea HBK , está en el plano de referencia y la (parte) restante en otro (plano), una parte de una de las rectas $E\Gamma$, EB estará también en el plano de referencia y otra (parte) en otro. Pero si la parte $Z\Gamma BH$ del triángulo $E\Gamma B$ está en el (plano) de referencia y la restante en otro, una parte de ambas rectas $E\Gamma$, EB estará también en el plano de referencia y otra (parte) en



tres primeras proposiciones del libro XI son insatisfactorias. Buena señal es que Euclides no es capaz de hacer ningún uso de su definición de plano para estas. En realidad se basa en supuestos sobre planos que debería haber declarado de modo análogo a como había adelantado postulados sobre rectas en el libro I. Algunos de estos postulados tácitos podrían formularse como sigue:

- XI 1* Si dos puntos están en un plano también lo está la recta que pasa a través de ellos
- 2* Tres puntos cualesquiera que no estén en línea recta determinan un plano.
- 3* Si dos planos se cortan, lo hacen en una recta.
- 4* Para todo plano hay un punto que no está en él. (El propósito general de este supuesto es generar nuevos planos.)

Para más detalles, cf. MUELLER, *Philosophy of Mathematics...*, op. cit., págs. 208 ss.

otro; lo que precisamente se ha demostrado que es absurdo [XI 1]. Por tanto, el triángulo $E\Gamma B$ está en un plano. Pero en el (plano) en que está el triángulo $E\Gamma B$, en ese está también cada una de las rectas $E\Gamma$, EB ; y en el plano en que está cada una de las rectas $E\Gamma$, EB , en ese están también AB , ΓA [XI 1].

Por consiguiente, las rectas AB , ΓA están en un plano y todo triángulo está en un plano. Q. E. D.⁵²

PROPOSICIÓN 3

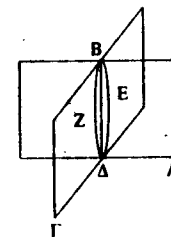
Si dos planos se cortan uno a otro su sección común es una recta.

Córtense, pues, los dos planos AB , $B\Gamma$ y sea la línea ΔB su sección común.

Digo que la línea ΔB es una recta.

Pues, si no, trácese de Δ a B en el plano AB , la recta ΔEB , y en el plano $B\Gamma$ la recta ΔZB .

Entonces las dos rectas ΔEB , ΔZB tendrán los mismos extremos y evidentemente encerrarán un área; lo cual es absurdo. Entonces, ΔEB , ΔZB no son rectas. De manera semejante demostraríamos que no habrá ninguna otra (recta) trazada de Δ a B excepto ΔB , la sección común de los planos AB , $B\Gamma$.



⁵² Es discutible el valor de la prueba de esta proposición dado que Euclides sólo considera ciertos triángulos y ciertos cuadriláteros que forman parte del triángulo inicial. SIMSON (*op. cit.*, pág. 193) enuncia el teorema como sigue: «Si dos rectas se cortan una a otra, estarán en un plano; y tres rectas cualesquiera, que se encuentran mutuamente, están en un plano».

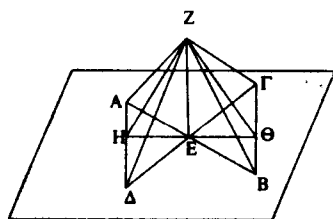
Por consiguiente, si dos planos se cortan uno a otro, su sección común es una recta. Q. E. D.⁵³

PROPOSICIÓN 4

Si se levanta una recta formando ángulos rectos con dos rectas que se cortan una a otra en su sección común, formará también ángulos rectos con el plano que pasa a través de ellas.

Levántese, pues, una recta EZ formando ángulos rectos a partir del punto E con dos rectas AB, $\Gamma\Delta$ que se cortan en el punto E.

Digo que EZ forma también ángulos rectos con el plano (que pasa) a través de AB, $\Gamma\Delta$.



Pues tómense las (rectas) AE, EB, ΓE , ΔE iguales entre sí y trácense una recta al azar, HE Θ , por el punto E, y trácense A Δ , ΓB , y además, desde un punto al azar, Z, (de la recta EZ), trácense ZA, ZH, Z Δ , Z Γ , Z Θ , ZB. Ahora bien, como las

dos (rectas) AE, ΔE son iguales a las dos (rectas) ΓE , EB y comprenden ángulos iguales [I 15], entonces la base A Δ es igual a la base ΓB , y el triángulo A ΔE será igual al triángulo $\Gamma B E$ [I 4]; de modo que el ángulo $\Delta A E$ es igual al ángulo $E B \Gamma$. Pero el ángulo AEH es también igual al (ángulo) BE Θ [I 15]. Así pues AHE, BE Θ

⁵³ SIMSON suprime el pasaje «entonces $\Delta E B$, $\Delta Z B$ no son rectas. De manera semejante demostraríamos que no habrá ninguna otra (recta) trazada de Δ a B excepto ΔB , la sección común de los planos AB, B Γ », por considerarlo superfluo. Cf. *op. cit.*, pág. 346.

son dos triángulos que tienen dos ángulos iguales a dos ángulos respectivamente y un lado igual a un lado, el que corresponde a los ángulos iguales, esto es: el (lado) AE al (lado) EB; luego tendrá también los lados restantes iguales a los lados restantes [I 26]. Por tanto, HE es igual a E Θ y AH a B Θ . Y como AE es igual a EB, mientras que ZE es común y forma ángulos rectos, entonces, la base ZA es igual a la base ZB [I 4]. Por lo mismo, Z Γ también es igual a Z Δ . Ahora bien, como A Δ es igual a ΓB , y ZA es igual a ZB, entonces, los dos (lados) ZA, A Δ son iguales respectivamente a los dos (lados) ZB, B Γ ; pero se ha demostrado que también la base Z Δ es igual a la base Z Γ ; luego el ángulo Z ΔA es igual al ángulo ZB Γ [I 8]. Y puesto que se ha demostrado que AH es a su vez igual a B Θ , mientras que ZA es también igual a ZB, entonces los dos (lados) ZA, AH son iguales a los dos (lados) ZB, B Θ . Y se ha demostrado que el (ángulo) ZAH es también igual al (ángulo) ZB Θ ; así pues, la base ZH es igual a la base Z Θ [I 4]. Ahora bien, puesto que se ha demostrado que HE es a su vez igual a E Θ y EZ es común, entonces los dos (lados) HE, EZ son iguales a los dos (lados) ΘE , EZ; y la base ZH es igual a la base Z Θ ; entonces el ángulo HEZ es igual al ángulo $\Theta E Z$ [I 8]. Luego cada uno de los ángulos HEZ, $\Theta E Z$ es recto. Por tanto, ZE forma ángulos rectos con H Θ trazada al azar por el punto E.

De manera semejante demostraríamos que ZE forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y que están en el plano de referencia. Pero una recta es ortogonal a un plano cuando forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y que están en el mismo plano [XI Def. 3]. Luego ZE forma ángulos rectos con el plano de referencia. Y el plano de referencia es el (que pasa) a través de las (rectas) AB, $\Gamma\Delta$. Por tanto ZE forma ángulos rectos con el plano (que pasa) a través de las (rectas) AB, $\Gamma\Delta$.

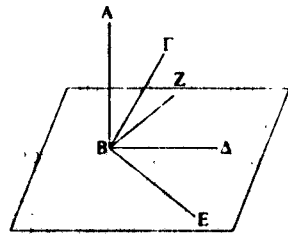
Por consiguiente, si se levanta una recta formando ángulos rectos con dos rectas que se cortan, en su sección común, for-

mará también ángulos rectos con el plano (que pasa) a través de ellas. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 5

Si se levanta una recta formando ángulos rectos con tres rectas que se tocan, en su sección común, las tres rectas están en un plano.

Levántese, pues, una recta AB formando ángulos rectos con tres rectas BΓ, BΔ, BE, en su punto de contacto, B.



Digo que BΓ, BΔ, BE están en un plano.

Pues, supongamos que no, y si fuera posible, estén BΔ, BE en el plano de referencia y BΓ en uno más elevado, prolónguese el plano que pasa a través de AB, BΓ; entonces producirá una recta como sección común en el plano de referencia [XI 3]. Produzca la (recta) BZ. Así pues, las tres rectas AB, BΓ, BZ están en un plano, el trazado a través de las (rectas) AB, BΓ. Y puesto que AB forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) BΔ, BE, entonces AB es ortogonal también al plano que pasa a través de BΔ, BE [XI 4]. Y el plano (que pasa) a través de BΔ, BE es el de referencia; luego AB es ortogonal al plano de referencia. De modo que AB hará ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3]. Pero BZ la toca y está en el plano de referencia; entonces el ángulo ABZ es recto. Y se ha supuesto que el ángulo ABΓ también es recto; luego el ángulo ABZ es igual al ángulo ABΓ. Y están en un plano: lo cual es

imposible. Luego la recta BΓ no está en un plano más elevado; por tanto, las tres rectas BΓ, BΔ, BE están en un plano.

Por consiguiente, si se levanta una recta formando ángulos rectos con tres rectas que se tocan, en su punto de contacto, las tres rectas están en un plano. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 6

Si dos rectas forman ángulos rectos con el mismo plano, las rectas serán paralelas.

Formen, pues, las dos rectas AB, ΓΔ ángulos rectos con el plano de referencia.

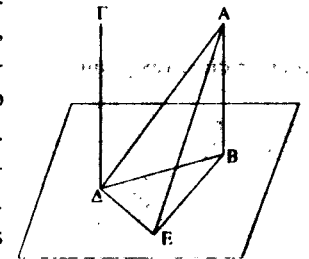
Digo que AB es paralela a ΓΔ.

Pues únanse con el plano de referencia en los puntos B, Δ y trácese la recta BΔ, y trácese ΔE formando ángulos rectos con BΔ en el plano de referencia, y hágase ΔE igual a AB, y trácese BE, AE, AΔ.

Ahora bien, como AB es ortogonal al plano de referencia, hará ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3].

Pero cada una de las rectas BΔ, BE, que están en el plano de referencia, toca a AB; entonces cada uno de los ángulos ABA, ABE es recto. Por lo mismo, cada uno de los (ángulos) ΓΔB, ΓΔE también es recto. Y como AB es igual a ΔE y BΔ es común, entonces los dos (lados)

AB, BΔ son iguales a los dos (lados) EΔ, ΔB; y comprenden ángulos rectos; luego la base AΔ es igual a la base BE [I 4]. Ahora bien, como AB es igual a ΔE, mientras que AΔ es también igual a



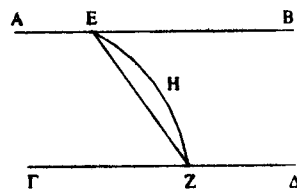
BE, entonces los dos (lados) AB, BE son iguales a los dos (lados) EA, ΔA ; y AE es su base común; luego el ángulo ABE es igual al ángulo EAA [I 8]. Pero el (ángulo) ABE es recto; entonces el (ángulo) EAA es también recto; luego EA forma ángulo recto con ΔA . Pero forma también ángulos rectos con cada una de las (rectas) BA, $\Delta \Gamma$. Entonces EA se ha levantado formando ángulos rectos con las tres rectas BA, ΔA , $\Delta \Gamma$, en su punto de contacto; luego las tres rectas BA, ΔA , $\Delta \Gamma$ están en un plano [XI 5]. Pero en el plano en que están BA, ΔA , en éste está también AB: porque todo triángulo está en un plano [XI 2]; entonces las rectas AB, BA, $\Delta \Gamma$ están en un plano. Ahora bien, cada uno de los ángulos ABA, BAA es recto; por tanto, AB es paralela a $\Delta \Gamma$ [I 28].

Por consiguiente, si dos rectas forman ángulos rectos con el mismo plano, las rectas serán paralelas. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 7

Si dos rectas son paralelas y se toman unos puntos al azar en cada una de ellas, la recta que une los puntos está en el mismo plano que las paralelas.

Sean AB, $\Gamma \Delta$ dos rectas paralelas y tómense al azar en cada una de ellas los puntos E, Z respectivamente.



Digo que la recta que une los puntos E, Z está en el mismo plano que las paralelas.

Pues supongamos que no, y si fuera posible, esté en un plano más elevado como EHZ, y trácese un plano que pase a través de EHZ, entonces producirá una recta como sección en el plano de referencia [XI 3]. Prodúzcala como la (recta) EZ; entonces las dos

rectas EHZ, EZ encerrarán un espacio; lo cual es imposible; luego la recta trazada de E a Z no está en un plano más elevado; por tanto, la recta trazada de E a Z está en el plano que pasa a través de las paralelas AB, $\Gamma \Delta$.

Por consiguiente, si dos rectas son paralelas y se toman unos puntos al azar en cada una de ellas, la recta que une los puntos está en el mismo plano que las paralelas. Q. E. D.

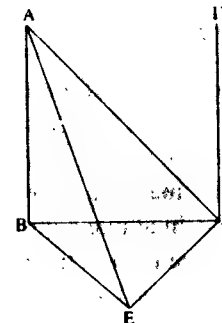
PROPOSICIÓN 8

Si dos rectas son paralelas y una de ellas forma ángulos rectos con un plano cualquiera, la restante formará también ángulos rectos con el mismo plano.

Sean AB, $\Gamma \Delta$ dos rectas paralelas y una de ellas, AB, forme ángulos rectos con el plano de referencia.

Digo que la restante, $\Gamma \Delta$, formará también ángulos rectos con el mismo plano.

Pues únense AB, $\Gamma \Delta$ con el plano de referencia en los puntos B, Δ , y trácese BA; entonces AB, $\Gamma \Delta$, BA están en un plano [XI 7]. Trácese ΔE formando ángulos rectos con BA en el plano de referencia y hágase ΔE igual a AB, y trácese BE, AE, AD. Y puesto que AB es ortogonal al plano de referencia, entonces AB forma ángulos rectos también con todas las rectas que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3]; luego cada uno de los ángulos ABA, ABE es recto. Y puesto que la recta BA ha incidido sobre las paralelas AB, $\Gamma \Delta$, entonces los ángulos ABA, $\Gamma \Delta B$ son iguales a dos rectos [I 29]. Pero el ángulo



$AB\Delta$ es recto; entonces el ángulo ΓAB es también recto; luego $\Gamma\Delta$ forma ángulos rectos con $B\Delta$. Y como AB es igual a ΔE , y $B\Delta$ es común, entonces los dos lados AB , $B\Delta$ son iguales a los dos (lados) $E\Delta$, ΔB ; y el ángulo $AB\Delta$ es igual al ángulo $E\Delta B$: porque cada uno de ellos es recto; luego la base $A\Delta$ es igual a la base BE . Y como AB es igual a ΔE , y BE a $A\Delta$, entonces los dos (lados) AB , BE son iguales respectivamente a los dos (lados) $E\Delta$, AA . Y AE es su base común; luego el ángulo ABE es igual al ángulo EAA . Pero el ángulo ABE es recto; entonces el ángulo EAA es también recto; así pues, $E\Delta$ forma ángulos rectos con $A\Delta$. Pero forma ángulos rectos también con ΔB ; luego $E\Delta$ forma también ángulos rectos con el plano que pasa a través de $B\Delta$, $A\Delta$ [XI 4]. Entonces $E\Delta$ producirá ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano $B\Delta A$. Pero $\Delta\Gamma$ está en el plano que pasa a través de $B\Delta A$, teniendo en cuenta que AB , $B\Delta$ están en el plano que pasa a través de $B\Delta A$ [XI 2], y $\Delta\Gamma$ está también en el plano en el que están AB , $B\Delta$. Entonces $E\Delta$ forma ángulos rectos con $\Delta\Gamma$; de modo que ΓA también forma ángulos rectos con ΔE . Pero $\Gamma\Delta$ forma también ángulos rectos con $B\Delta$. Luego $\Gamma\Delta$ está puesta formando ángulos rectos desde el punto de sección, Δ , con las dos rectas ΔE , ΔB que se cortan entre sí; de modo que $\Gamma\Delta$ forma también ángulos rectos con el plano que pasa a través de ΔE , ΔB [XI 4]. Pero el plano que pasa a través de ΔE , ΔB es el de referencia; luego $\Gamma\Delta$ forma ángulos rectos con el plano de referencia.

Por consiguiente, si dos rectas son paralelas y una de ellas forma ángulos rectos con un plano cualquiera, la restante formará también ángulos rectos con el mismo plano. Q. E. D.

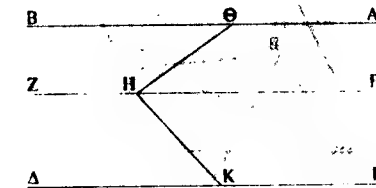
PROPOSICIÓN 9

Las paralelas a una misma recta y que no están en el mismo plano que ella son también paralelas entre sí.

Sean, pues, cada una de las rectas AB , $\Gamma\Delta$ paralelas a EZ , sin estar en el mismo plano que ella.

Digo que AB es paralela a $\Gamma\Delta$.

Pues tómese al azar el punto H en la recta EZ , y trácese desde él la (recta) $H\Theta$ formando ángulos rectos con EZ en el plano que pasa a través de EZ , AB y trácese HK formando a su vez ángulos rectos con EZ en el plano que pasa a través de ZE , $\Gamma\Delta$. Ahora bien, como EZ forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) $H\Theta$, HK , entonces EZ forma ángulos rectos tam-



bien con el plano que pasa a través de $H\Theta$, HK [XI 4]. Y EZ es paralela a AB , luego también AB forma ángulos rectos con el plano que pasa a través de ΘHK [XI 8]. Por lo mismo $\Gamma\Delta$ también forma ángulos rectos con el plano que pasa a través de ΘHK ; entonces cada una de las (rectas) AB , $\Gamma\Delta$ forma ángulos rectos con el plano que pasa a través de ΘHK . Pero si dos rectas forman ángulos rectos con el mismo plano, las rectas son paralelas [XI 6].

Por consiguiente, AB es paralela a $\Gamma\Delta$. Q. E. D.

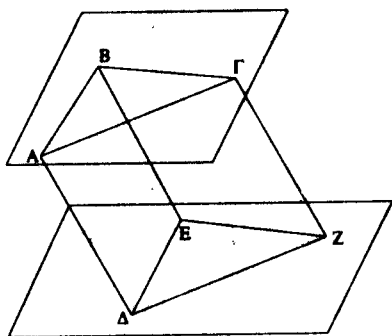
PROPOSICIÓN 10

Si dos rectas que se tocan son paralelas a otras dos rectas que se tocan, sin estar en el mismo plano, comprenderán ángulos iguales.

Sean AB , $B\Gamma$ dos rectas que se tocan, paralelas a las dos rectas que se tocan ΔE , EZ , sin estar en el mismo plano.

Digo que el ángulo $AB\Gamma$ es igual al (ángulo) ΔEZ .

Tómense, pues, las (rectas) BA , $B\Gamma$, $E\Delta$, EZ iguales entre sí, y trácense $A\Delta$, ΓZ , BE , $A\Gamma$, ΔZ . Y como BA es igual y paralela a $E\Delta$, entonces $A\Delta$ también es igual y paralela a BE [I 33]. Por lo mismo, ΓZ también es igual y paralela a BE ; entonces cada una



de las (rectas) $A\Delta$, ΓZ es igual y paralela a BE . Pero las paralelas a una misma recta y que no están en el mismo plano que ella son también paralelas entre sí [XI 9]. Entonces $A\Delta$ es igual y paralela a ΓZ . Y $A\Gamma$, ΔZ las unen; luego $A\Delta$ es paralela a ΔZ [I 33]. Y como los dos (lados) AB , $B\Gamma$ son iguales a los dos (lados) ΔE , EZ y la base $A\Gamma$ es igual a la base ΔZ , entonces el ángulo $AB\Gamma$ es igual al ángulo ΔEZ .

Por consiguiente, si dos rectas que se tocan son paralelas a otras dos rectas que se tocan, sin estar en el mismo plano, comprenderán ángulos iguales. Q. E. D.

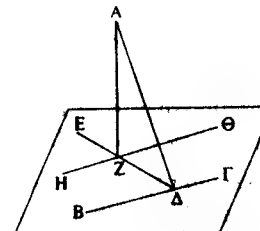
PROPOSICIÓN 11

Trazar una línea recta perpendicular a un plano dado desde un punto elevado dado.

Sea A el punto elevado dado y sea el plano de referencia el plano dado.

Así pues, hay que trazar una línea recta perpendicular al plano de referencia desde el punto A .

Trácese, pues, al azar, una recta $B\Gamma$ en el plano de referencia, y trácese, desde el punto A , la (recta) $A\Delta$ perpendicular a $B\Gamma$ [I 12]. Pues bien, si $A\Delta$ es perpendicular también al plano de referencia, habría resultado lo propuesto. Pero si no, trácese, desde el punto Δ , la (recta) ΔE formando ángulos rectos con $B\Gamma$ en el plano de referencia [I 11] y desde A , la (recta) AZ perpendicular a ΔE [I 12], y por el punto Z , trácese $H\Theta$ paralela a $B\Gamma$ [I 31].



Ahora bien, como $B\Gamma$ forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) ΔA , ΔE , entonces $B\Gamma$ forma ángulos rectos también con el plano que pasa a través de $E\Delta$ [XI 4]. Y $H\Theta$ es paralela a ella. Pero si dos rectas son paralelas y una de ellas forma ángulos rectos con un plano, la restante formará también ángulos rectos con el mismo plano [XI 8]; luego $H\Theta$ forma también ángulos rectos con el plano que pasa a través de $E\Delta$, ΔA . Por tanto, $H\Theta$ forma ángulos rectos con

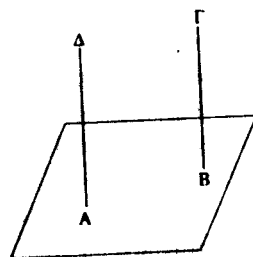
todas las rectas que la tocan y están en el plano que pasa a través de EA , AA [XI Def. 3]. Pero AZ que está en el plano que pasa a través de EA , AA la toca; luego $H\Theta$ forma ángulos rectos con ZA . De modo que también ZA forma ángulos rectos con ΘH . Pero AZ forma ángulos rectos con ΔE ; entonces AZ forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) $H\Theta$, ΔE . Ahora bien, si se levanta una recta formando ángulos rectos con dos rectas que se cortan, en su punto de sección, formará también ángulos rectos con el plano que pasa a través de ellas [XI 4]. Luego ZA forma ángulos rectos con el plano que pasa a través de EA , $H\Theta$. Pero el plano que pasa a través de EA , $H\Theta$ es el plano de referencia; por tanto, AZ forma ángulos rectos con el plano de referencia.

Por consiguiente, se ha trazado la línea recta AZ perpendicular al plano de referencia, desde el punto elevado dado, A . Q. E. F.

PROPOSICIÓN 12

Levantar una línea recta formando ángulos rectos con un plano dado desde un punto dado en él.

Sea el plano de referencia el plano dado y A el punto en él. Así pues hay que levantar una línea recta formando ángulos rectos con el plano de referencia desde el punto A .



Considérese un punto elevado cualquiera B y trázese desde el punto B , $B\Gamma$ perpendicular al plano de referencia [XI 11], y por el punto A trázese AA paralela a $B\Gamma$ [I 31].

Pues bien, como AA , ΓB son dos

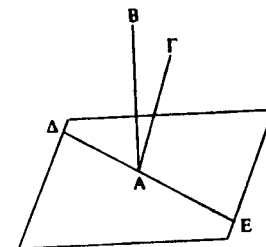
rectas paralelas y una de ellas, $B\Gamma$, forma ángulos rectos con el plano de referencia, entonces la restante AA forma también ángulos rectos con el plano de referencia [XI 8].

Por consiguiente, se ha levantado la (recta) AA formando ángulos rectos con el plano dado en su punto A . Q. E. F.

PROPOSICIÓN 13

No podrán levantarse por el mismo lado dos rectas formando ángulos rectos con el mismo plano desde el mismo punto.

Pues, si fuera posible, levántense por el mismo lado las dos rectas AB , $A\Gamma$ formando ángulos rectos con el plano de referencia, desde el mismo punto A , y trázese el plano que pasa a través de BA , $A\Gamma$; entonces producirá una recta como sección, a través del punto A , en el plano de referencia [XI 3]. Produzca la (recta) ΔAE ; entonces las rectas AB , $A\Gamma$, ΔAE están en un plano. Y como ΓA forma ángulos rectos con el plano de referencia, entonces hará ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3]. Pero ΔAE , que está en el plano de referencia, la toca; luego el ángulo ΓAE es recto. Por lo mismo, el ángulo BAE es también recto; luego el (ángulo) ΓAE es igual al (ángulo) BAE . Y están en un plano; lo cual es imposible.



Por consiguiente, no se levantarán por el mismo lado dos rectas formando ángulos rectos con el mismo plano desde el mismo punto. Q. E. D.

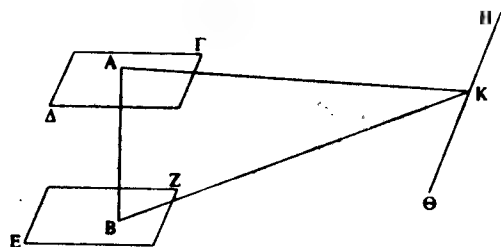
PROPOSICIÓN 14

Los planos con los que una misma recta forma ángulos rectos serán paralelos.

Forme, pues, ángulos rectos una recta cualquiera, AB, con cada uno de los planos $\Gamma\Delta$, EZ.

Digo que los planos son paralelos.

Pues si no, se encontrarán al prolongarse. Encuéntrense; entonces producirán una recta como sección común [XI 3].



Produzcan la (recta) H Θ , y tómese al azar el punto K en la (recta) H Θ y trácense AK, BK. Y como AB forma ángulos rectos con el plano EZ, entonces AB forma ángulos rectos con la recta BK que está en la prolongación del plano EZ [XI Def. 3]; luego el ángulo ABK es recto. Por lo mismo el ángulo BAK también es recto. Entonces los dos ángulos ABK, BAK del triángulo ABK son iguales a dos rectos; lo cual es imposible [I 17]; luego los planos $\Gamma\Delta$, EZ prolongados no se encontrarán; por tanto los planos $\Gamma\Delta$, EZ son paralelos.

Por consiguiente, los planos con los que la misma recta forma ángulos rectos serán planos paralelos. Q. E. D.

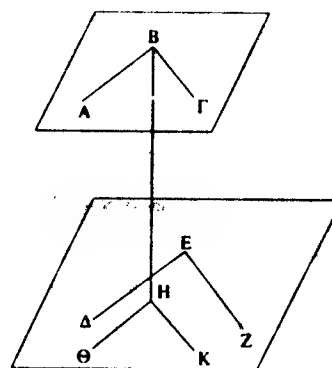
PROPOSICIÓN 15

Si dos rectas que se tocan son paralelas a dos rectas que se tocan sin estar en el mismo plano, los planos que pasan a través de ellas son paralelos.

Pues sean las rectas que se tocan AB, B Γ paralelas a las dos rectas que se tocan ΔE , EZ sin estar en el mismo plano.

Digo que los planos que pasan a través de AB, B Γ , ΔE , EZ, prolongados, no se encontrarán.

Trácese, pues, desde el punto B, BH perpendicular al plano que pasa a través de ΔE , EZ [XI 11], y únase con el plano en el punto H; trácese, por el punto H, la (recta) H Θ paralela a E Δ y la



(recta) HK (paralela) a EZ [I 31]. Y como BH forma ángulos rectos con el plano que pasa a través de ΔE , EZ, entonces hará ángulos rectos con todas las rectas que la toquen y estén en el plano que pasa a través de ΔE , EZ [XI Def. 3]. Pero cada una de las rectas H Θ , HK que están en el plano que pasa a través de ΔE , EZ la tocan; luego cada uno de los ángulos BH Θ , BHK es recto. Y como BA es paralela a H Θ [XI 9], entonces los ángulos HBA,

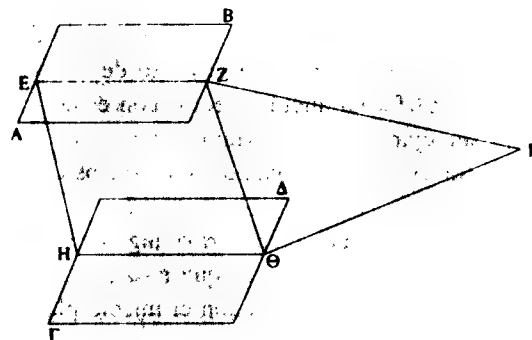
$BH\theta$ son iguales a dos rectos [I 29]. Pero el (ángulo) $BH\theta$ es recto; entonces el (ángulo) HBA es también recto; luego HB forma ángulos rectos con BA . Por lo mismo HB forma también ángulos rectos con $B\Gamma$. Pues bien, como la recta HB se ha levantado formando ángulos rectos con las dos rectas que se cortan BA , $B\Gamma$, entonces HB forma también ángulos rectos con el plano que pasa a través de BA , $B\Gamma$ [XI 4]. Pero los planos con los que una misma recta forma ángulos rectos son planos paralelos [XI 14]; luego el plano que pasa a través de AB , $B\Gamma$ es paralelo al plano que pasa a través de ΔE , EZ .

Por consiguiente, si dos rectas que se tocan son paralelas a dos rectas que se tocan sin estar en el mismo plano, los planos que pasan a través de ellas son paralelos. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 16

Si dos planos paralelos son cortados por un plano, las secciones comunes son paralelas.

Sean cortados, pues, los dos planos paralelos AB , $\Gamma\Delta$ por el plano $EZH\theta$, y sean sus secciones comunes EZ , $H\theta$.



Digo que EZ es paralela a $H\theta$.

Pues, si no, EZ , $H\theta$ se encontrarán si se prolongan en la dirección de Z , θ o en la dirección de E , H . Prolónguense en la dirección de Z , θ y encuéntrense, en primer lugar en el (punto) K . Ahora bien, como EZK están en el plano AB , entonces todos los puntos de la (recta) EZK están en el plano AB [X 1]. Pero K es uno de los puntos de la recta EZK , luego K está en el plano AB . Por lo mismo, entonces K está también en el plano $\Gamma\Delta$; por tanto los planos AB , $\Gamma\Delta$, si se prolongan, se encontrarán. Pero no se encuentran porque se ha supuesto que son paralelos; entonces las rectas EZ , $H\theta$ no se encontrarán si se prolongan en la dirección de Z , θ . De manera semejante demostraríamos que las rectas EZ , $H\theta$ tampoco se encontrarán si se prolongan en la dirección de E , H . Pero las (rectas) que no se encuentran en ninguna de las dos direcciones son paralelas. Luego EZ es paralela a $H\theta$.

Por consiguiente, si dos planos paralelos son cortados por un plano, las secciones comunes son paralelas. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 17

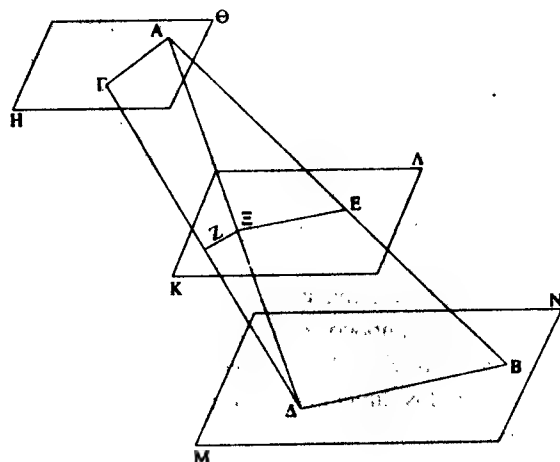
Si dos rectas son cortadas por planos paralelos, serán cortadas en las mismas razones.

Sean cortadas, pues, las dos rectas AB , $\Gamma\Delta$ por los planos paralelos $H\theta$, $\kappa\lambda$, MN , en los puntos A , E , B , Γ , Z , Δ .

Digo que, como la recta AE es a la recta EB , así ΓZ a $Z\Delta$.

Trácese, pues, las (rectas) $A\Gamma$, $B\Delta$, $A\Delta$ y únase $A\Delta$ con el plano $\kappa\lambda$ en el punto Ξ y trácese $E\Xi$, $E\Delta$. Y como los dos planos paralelos $\kappa\lambda$, MN son cortados por el plano $EB\Delta\Xi$, sus secciones comunes $E\Xi$, $B\Delta$ son paralelas [XI 16]. Por lo mismo, como los dos planos $H\theta$, $\kappa\lambda$ son cortados por el plano $A\Xi Z\Gamma$,

sus secciones comunes AG , EZ son paralelas [id.]. Y puesto que se ha trazado la recta EZ paralela a la BA , uno de los lados del triángulo $AB\Delta$, entonces, proporcionalmente, como AE es a EB ,



así AE es a EB [VI 2]. Y puesto que se ha trazado a su vez la recta EZ paralela a AG , uno de los lados del triángulo $AE\Gamma$, entonces, proporcionalmente, como AE es a EB , así EZ es a BA [id.]. Pero se ha demostrado también que como AE es a EB , así EZ es a BA ; luego, como AE es a EB , así EZ es a BA [V 11].

Por consiguiente, si dos rectas son cortadas por planos paralelos, serán cortadas en la misma razón. Q. E. D.

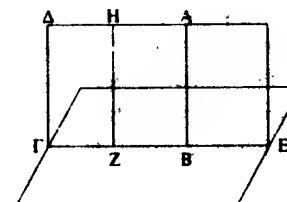
PROPOSICIÓN 18

Si una recta forma ángulos rectos con un plano cualquiera, todos los planos que pasen a través de ella formarán también ángulos rectos con el mismo plano.

Pues forme ángulos rectos una recta cualquiera, AB , con el plano de referencia.

Digo que todos los planos que pasan a través de AB forman también ángulos rectos con el plano de referencia.

Trácese, pues, el plano ΔE a través de AB y sea ΓE la sección común del plano ΔE y el de referencia; tómese al azar el punto Z en ΓE , y trácese, desde el punto Z , la (recta) ZH formando ángulos rectos con ΓE en el plano ΔE [I 11]. Ahora bien, como AB es ortogonal al plano de referencia, entonces AB formará también ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3]; de modo que también forma ángulos rectos con ΓE ; luego el ángulo ABZ es recto.



Pero el (ángulo) HZB es también recto; luego AB es paralela a ZH [I 28]. Pero AB forma ángulos rectos con el plano de referencia; entonces ZH forma también ángulos rectos con el plano de referencia [XI 8]. Ahora bien, un plano es ortogonal a un plano cuando las rectas trazadas en uno de los planos formando ángulos rectos con la sección común de los (dos) planos forman ángulos rectos con el plano restante [XI Def. 4]. Y se ha demostrado que la (recta) ZH , trazada en uno de los planos ΔE , formando ángulos rectos con la sección común de los planos ΓE , forma ángulos rectos con el plano de referencia; por tanto, el plano ΔE forma ángulos rectos con el de referencia. De manera semejante demostraríamos que todos los planos que pasan a través de AB forman ángulos rectos con el plano de referencia.

Por consiguiente, si una recta forma ángulos rectos con un plano cualquiera, todos los planos que pasan a través de ella formarán también ángulos rectos con el mismo plano. Q. E. D.

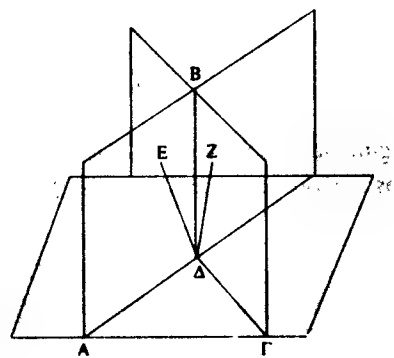
PROPOSICIÓN 19

Si dos planos que se cortan forman ángulos rectos con un plano, su sección común formará también ángulos rectos con el mismo plano.

Pues formen los dos planos AB , $B\Gamma$ ángulos rectos con el plano de referencia, y sea BA su sección común.

Digo que BA forma ángulos rectos con el plano de referencia.

Pues supongamos que no, y trácese desde el punto Δ la (recta) ΔE en el plano AB formando ángulos rectos con la (recta) AA y la (recta) ΔZ en el plano $B\Gamma$ formando ángulos rectos con $\Gamma\Delta$. Y como el plano AB es ortogonal al plano de referencia, y se ha trazado ΔE en el plano AB formando ángulos rectos



con su sección común, AA , entonces ΔE es ortogonal al plano de referencia [XI Def. 4]. De manera semejante demostraríamos que ΔZ es también ortogonal al plano de referencia. Entonces se han levantado dos rectas formando ángulos rectos con el plano de referencia desde el mismo punto, Δ , por el mis-

mo lado; lo cual es imposible [XI 13]. Luego no se levantará (otra recta) desde el punto Δ formando ángulos rectos con el plano de referencia excepto ΔB , la sección común de los planos AB , $B\Gamma$.

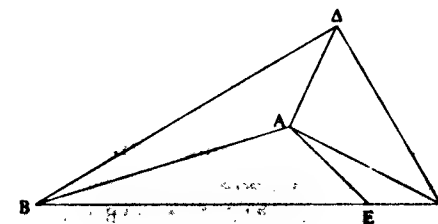
Por consiguiente, si dos planos se cortan formando ángulos rectos con un plano, su sección común formará también ángulos rectos con el mismo. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 20

Si un ángulo sólido es comprendido por tres ángulos planos, dos cualesquiera, tomados juntos de cualquier manera, son mayores que el restante.

Sea comprendido el ángulo sólido correspondiente a A por los tres ángulos planos $BA\Gamma$, $\Gamma A\Delta$, ΔAB .

Digo que dos cualesquiera de los ángulos $BA\Gamma$, $\Gamma A\Delta$, ΔAB , tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante.



Pues bien, si los ángulos $BA\Gamma$, $\Gamma A\Delta$, ΔAB son iguales entre sí, está claro que dos cualesquiera son mayores que el restante. Pero si no, sea mayor el (ángulo) $BA\Gamma$ y constrúyase sobre la

recta AB y en su punto A el ángulo BAE igual al ángulo ΔAB en el plano que pasa a través de BAG; hágase AE igual a ΔA , y corte la (recta) BEG trazada por el punto E a las rectas AB, AG en los puntos B, Γ , y trácense ΔB , $\Delta \Gamma$. Ahora bien, como ΔA es igual a AE y AB es común, dos (lados) son iguales a dos (lados); y el ángulo ΔAB es igual al ángulo BAE; entonces la base ΔB es igual a la base BE [I 4]. Y como los dos (lados) BA, $\Delta \Gamma$ son mayores que BG [I 20], de los cuales se ha demostrado que ΔB es igual a BE, entonces el restante $\Delta \Gamma$ es mayor que el restante EG. Ahora bien, como ΔA es igual a AE, y AG es común y la base $\Delta \Gamma$ es mayor que la base EG, entonces el ángulo ΔAG es mayor que el ángulo EAG [I 25]. Pero se ha demostrado que el (ángulo) ΔAB es igual al (ángulo) BAE; luego los (ángulos) ΔAB , ΔAG son mayores que el ángulo BAG. De manera semejante demostraríamos que también los restantes tomados juntos dos a dos son mayores que el restante.

Por consiguiente, si un ángulo sólido es comprendido por tres ángulos planos, dos cualesquiera tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 21

Todo ángulo sólido es comprendido por ángulos planos menores que cuatro rectos.

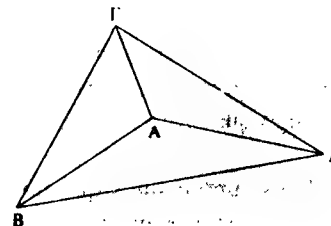
Sea comprendido el ángulo sólido correspondiente a A por los ángulos planos BAG, ΓAA , ΔAB .

Digo que los (ángulos) BAG, ΓAA , ΔAB son menores que cuatro rectos.

Tómense, pues, al azar, los puntos B, Γ , Δ en las (rectas) AB, AG, ΔA respectivamente, y trácense BG, $\Gamma \Delta$, ΔB . Y como el ángulo sólido correspondiente a B es comprendido por los tres

ángulos planos ΓBA , ΔBA , $\Gamma \Delta A$, dos cualesquiera son mayores que el restante [XI 20]. Luego los ángulos ΓBA , ΔBA son mayores que el ángulo $\Gamma \Delta A$. Por lo mismo los (ángulos) $\Gamma \Delta A$, $\Delta \Delta A$ también son mayores que el (ángulo) $\Gamma \Delta B$, y los (ángulos) $\Gamma \Delta A$, $\Delta \Delta A$ son mayores que el (ángulo) $\Gamma \Delta B$; entonces los seis ángulos ΓBA , ΔBA , $\Gamma \Delta A$, $\Delta \Delta A$, $\Delta \Delta B$ son mayores que los tres (ángulos) $\Gamma \Delta A$, $\Gamma \Delta B$, $\Gamma \Delta A$.

Pero los tres (ángulos) $\Gamma \Delta A$, $\Delta \Delta A$, $\Delta \Delta B$ son iguales a dos rectos [I 32]. Luego los seis ángulos ΓBA , ΔBA , $\Gamma \Delta A$, $\Delta \Delta A$, $\Delta \Delta B$ son mayores que dos rectos. Y como los tres ángulos de cada uno de



los triángulos ABG, AGD, $\Delta \Delta B$ son iguales a dos rectos, entonces los nueve ángulos ΓBA , $\Delta \Delta B$, BAG, AGD, $\Gamma \Delta A$, $\Gamma \Delta A$, $\Delta \Delta B$, $\Delta \Delta A$, $\Delta \Delta B$ de los tres triángulos son iguales a seis rectos, y de ellos los seis ángulos ABG, BGA, AGD, $\Gamma \Delta A$, $\Delta \Delta B$, $\Delta \Delta A$ son mayores que dos rectos; por tanto los tres (ángulos) restantes BAG, $\Gamma \Delta A$, $\Delta \Delta B$ que comprenden el ángulo sólido son menores que cuatro rectos.

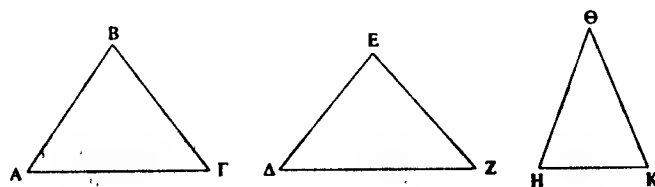
Por consiguiente, todo ángulo sólido es comprendido por ángulos planos menores que cuatro rectos. Q. E. D.⁵⁴

⁵⁴ Aunque Euclides enuncia esta proposición para cualquier ángulo sólido, sólo la prueba para el caso particular del ángulo triedro. Una interpretación piadosa sería entender que la prueba de los otros casos se deja al aplicado lector. Heath suele dar abundantes muestras de piedad en este sentido. Una es la presente proposición (*op. cit.*, pág 310). De todos modos es la actitud hermenéutica más congruente con la dimensión escolar y los propósitos didácticos que suelen atribuirse a los *Elementos*.

PROPOSICIÓN 22

Si hay tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante, y los comprenden rectas iguales, es posible construir un triángulo a partir de las (rectas) que unen (los extremos) de las rectas iguales.

Sean $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante, a saber: los (ángulos) $AB\Gamma$, ΔEZ mayores que el (ángulo)



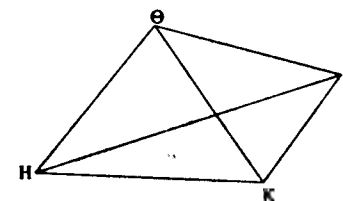
$H\Theta K$, los (ángulos) ΔEZ , $H\Theta K$ mayores que $AB\Gamma$ y además los (ángulos) $H\Theta K$, $AB\Gamma$ (mayores) que ΔEZ . Y sean iguales las rectas AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$, ΘK , y trácense $A\Gamma$, ΔZ , HK .

Digo que es posible construir un triángulo a partir de (rectas) iguales a $A\Gamma$, ΔZ , HK , es decir, que dos cualesquiera de las (rectas) $A\Gamma$, ΔZ , HK son mayores que la restante.

Pues si los ángulos $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ son iguales entre sí, está claro que, siendo también iguales $A\Gamma$, ΔZ , HK , es posible construir un triángulo a partir de las (rectas) iguales a $A\Gamma$, ΔZ , HK .

Pero si no, sean desiguales y constrúyase en la recta ΘK y en su punto Θ el ángulo $K\Theta\Lambda$ igual al ángulo $AB\Gamma$, y hágase $\Theta\Lambda$ igual a una de las (rectas) AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$, ΘK , y trácense $K\Lambda$, $H\Lambda$. Ahora bien, puesto que los dos lados AB , $B\Gamma$ son iguales a los dos (lados) $K\Theta$, $\Theta\Lambda$, y el ángulo correspondiente a B es

igual al (ángulo) $K\Theta\Lambda$, entonces la base $A\Gamma$ es igual a la base $K\Lambda$ [I 4]. Y como los (ángulos) $AB\Gamma$, $H\Theta K$ son mayores que el (ángulo) ΔEZ y el (ángulo) ΔEZ y el (ángulo) $AB\Gamma$ es igual al (ángulo) $K\Theta\Lambda$, entonces el (ángulo) $H\Theta\Lambda$ es mayor que el (ángulo)



ΔEZ . Y como los dos (lados) $H\Theta$, $\Theta\Lambda$ son iguales a los dos (lados) ΔE , EZ y el (ángulo) $H\Theta\Lambda$ es mayor que el (ángulo) ΔEZ , entonces la base $H\Lambda$ es mayor que la base ΔZ [I 24]. Pero HK , $K\Lambda$ son mayores que $H\Lambda$. Así pues, HK , $K\Lambda$ son mucho mayores que ΔZ . Pero $K\Lambda$ es igual a $A\Gamma$; luego $A\Gamma$, HK son mayores que la restante ΔZ . De manera semejante demostraríamos que $A\Gamma$, ΔZ son también mayores que HK , y además ΔZ , HK son mayores que $A\Gamma$.

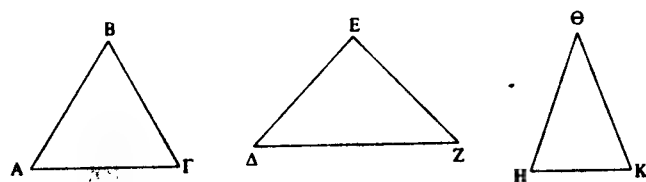
Por consiguiente, es posible construir un triángulo a partir de rectas iguales a las (rectas) $A\Gamma$, ΔZ , HK . Q. E. D. ⁵⁵.

⁵⁵ El texto griego da una prueba alternativa que Heiberg relega al apéndice. Simson selecciona esta prueba alternativa en su edición (*Edic. cit.*, pág. 209). Desde el punto de vista lógico esta opción de Simson sería la preferible (Cf. MUELLER, *op. cit.*, pág. 215), aunque parezca más alejada del presunto proceder de Euclides.

PROPOSICIÓN 23

Construir un ángulo sólido a partir de tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante; entonces, es necesario que los tres ángulos sean menores que cuatro rectos.

Sean $\text{AB}\Gamma$, $\Delta\text{E}\text{Z}$, $\text{H}\Theta\text{K}$ los tres ángulos planos dados, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante, siendo los tres además menores que cuatro rectos.



Así pues hay que construir un ángulo sólido a partir de (ángulos) iguales a $\text{AB}\Gamma$, $\Delta\text{E}\text{Z}$, $\text{H}\Theta\text{K}$.

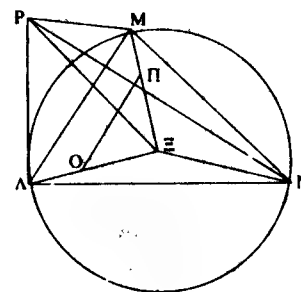
Tómense las (rectas) iguales AB , $\text{B}\Gamma$, ΔE , EZ , $\text{H}\Theta$, ΘK , y trácense $\text{A}\Gamma$, ΔZ , HK [XI 22]. Entonces es posible construir un triángulo a partir de rectas iguales a $\text{A}\Gamma$, ΔZ , HK [XI 22]. Constrúyase y sea $\Lambda\text{M}\text{N}$, de modo que $\text{A}\Gamma$ sea igual a ΛM , ΔZ a MN y además HK a $\text{N}\Lambda$, y circunscribábase en torno al triángulo $\Lambda\text{M}\text{N}$ el círculo $\Lambda\text{M}\text{N}$, tómese su centro y sea Ξ y trácense $\Lambda\Xi$, $\text{M}\Xi$, $\text{N}\Xi$.

Digo que AB es mayor que $\Lambda\Xi$. Pues, si no, o AB es igual a $\Lambda\Xi$ o es menor. En primer lugar sea igual. Y como AB es igual a $\Lambda\Xi$, mientras que AB es igual a $\text{B}\Gamma$ y $\Xi\Lambda$ a ΞM , entonces los dos (lados) AB , $\text{B}\Gamma$ son iguales respectivamente a los dos (lados) $\Lambda\Xi$, ΞM ; y se ha supuesto que la base $\text{A}\Gamma$ es igual a la

base ΛM ; luego el (ángulo) $\text{AB}\Gamma$ es igual al (ángulo) $\Lambda\Xi\text{M}$ [I 8]. Por la misma razón el (ángulo) $\Delta\text{E}\text{Z}$ es igual al (ángulo) $\text{M}\Xi\text{N}$ y además el (ángulo) $\text{H}\Theta\text{K}$ (es igual) al (ángulo) $\text{N}\Xi\Lambda$, luego los tres ángulos $\text{AB}\Gamma$, $\Delta\text{E}\text{Z}$, $\text{H}\Theta\text{K}$ son iguales a los tres ángulos $\Lambda\Xi\text{M}$, $\text{M}\Xi\text{N}$, $\text{N}\Xi\Lambda$. Pero los tres (ángulos) $\Lambda\Xi\text{M}$, $\text{M}\Xi\text{N}$, $\text{N}\Xi\Lambda$ son iguales a cuatro rectos, entonces los tres (ángulos) $\text{AB}\Gamma$, $\Delta\text{E}\text{Z}$, $\text{H}\Theta\text{K}$ son iguales a cuatro rectos. Pero se ha supuesto que son menores que cuatro rectos; lo cual es absurdo. Luego AB no es igual a $\Lambda\Xi$.

Digo además que AB tampoco es menor que $\Lambda\Xi$.

Porque si fuera posible sea así y hágase ΞO igual a AB , ΞP igual a $\text{B}\Gamma$ y trácese OP . Ahora bien, como AB es igual a $\text{B}\Gamma$, ΞO es igual a ΞP ; de modo que la (recta) restante ΛO es igual a ΛM . Entonces ΛM es paralela a OP [VI 2] y $\Lambda\text{M}\Xi$, $\text{O}\text{P}\Xi$ son equiangulares [I 29]; luego, como $\Xi\Lambda$ es a ΛM , así ΞO a OP [VI 4]; y por alternancia, como $\Lambda\Xi$ es a ΞO , así ΛM a OP [V 16]. Pero $\Lambda\Xi$ es mayor que ΞO ; entonces ΛM es mayor que OP . Pero ΛM se ha hecho igual a $\text{A}\Gamma$; luego $\text{A}\Gamma$ es también mayor que OP . Pues bien, como los dos (lados) AB , $\text{B}\Gamma$ son iguales a



los dos (lados) $\text{O}\Xi$, ΞP , y la base $\text{A}\Gamma$ es mayor que la base OP , entonces el (ángulo) $\text{AB}\Gamma$ es mayor que el (ángulo) $\text{O}\Xi\text{P}$ [I 25]. De manera semejante demostraríamos que el (ángulo) $\Delta\text{E}\text{Z}$ es también mayor que el (ángulo) $\text{M}\Xi\text{N}$ y el (ángulo) $\text{H}\Theta\text{K}$

(mayor) que el (ángulo) NEA . Por tanto, los tres ángulos $\text{AB}\Gamma$, ΔEZ , $\text{H}\Theta\text{K}$ son mayores que los tres (ángulos) ΛEM , MEN , NEA . Pero se ha supuesto que los (ángulos) $\text{AB}\Gamma$, ΔEZ , $\text{H}\Theta\text{K}$ son menores que cuatro rectos; entonces los (ángulos) ΛEM , MEN , NEA son mucho menores que cuatro rectos. Pero también iguales, lo cual es absurdo. Luego AB no es menor que $\Lambda\Xi$. Pero se ha demostrado que tampoco es igual; por tanto AB es mayor que $\Lambda\Xi$.

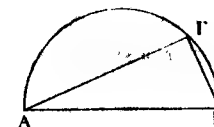
Levántese desde el punto Ξ la (recta) ΞP formando ángulos rectos con el plano del círculo ΛMN [XI 12]; y sea el cuadrado de ΞP igual al (área) en la que el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de $\Lambda\Xi$ [Lema], y trácense PA , PM , PN . Ahora bien, como PE forma ángulos rectos con el plano del círculo ΛMN , entonces PE forma también ángulos rectos con cada una de las (rectas) $\Lambda\Xi$, ME , NE . Y como $\Lambda\Xi$ es igual a EM y ΞP es común y forma ángulos rectos, entonces la base PA es igual a la base PM [I 4]. Por lo mismo PN es igual a cada una de las (rectas) PA , PM ; entonces las tres (rectas) PA , PM , PN son iguales entre sí. Y como se ha supuesto que el (cuadrado) de ΞP es igual al (área) en la que el (cuadrado) de AB es mayor que el (cuadrado) de $\Lambda\Xi$, entonces el (cuadrado) de AB es igual a los (cuadrados) de $\Lambda\Xi$, ΞP . Pero el (cuadrado) de ΛP es igual a los (cuadrados) de $\Lambda\Xi$, ΞP ; porque el (ángulo) $\Lambda\Xi\text{P}$ es recto [I 47]; entonces el (cuadrado) de AB es igual al (cuadrado) de PA ; luego AB es igual a PA . Pero cada una de las (rectas) $\text{B}\Gamma$, ΔE , EZ , $\text{H}\Theta$, ΘK es igual a AB , y cada una de las (rectas) PM , PN es igual a PA ; entonces cada una de las (rectas) AB , $\text{B}\Gamma$, ΔE , EZ , $\text{H}\Theta$, ΘK es igual a cada una de las (rectas) PA , PM , PN . Ahora bien, como los dos (lados) ΛP , PM son iguales a los dos (lados) AB , $\text{B}\Gamma$ y se ha supuesto que la base ΛM es igual a la base $\Lambda\Gamma$, entonces el ángulo ΛPM es igual al ángulo $\text{AB}\Gamma$ [I 8]. Por lo mismo, el (ángulo) MPN es igual al (ángulo) ΔEZ y el (ángulo) ΛPN al (ángulo) $\text{H}\Theta\text{K}$.

Por consiguiente, a partir de los tres ángulos planos ΛPM , MPN , ΛPN que son iguales a los tres dados $\text{AB}\Gamma$, ΔEZ , $\text{H}\Theta\text{K}$, se ha construido el ángulo sólido correspondiente a P comprendido por los ángulos ΛPM , MPN , ΛPN . Q. E. F. ⁵⁶.

LEMA:

Demostraríamos como sigue de qué manera se puede tomar el cuadrado de ΞP igual al área en la que el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de $\Lambda\Xi$:

Pónganse las rectas AB , $\Lambda\Xi$, y sea AB mayor, y descríbase sobre ella el semicírculo $\text{AB}\Gamma$, y adáptese al semicírculo $\text{AB}\Gamma$ la (recta) $\Lambda\Gamma$ igual a la recta $\Lambda\Xi$ que no sea mayor que el diámetro AB [IV 1]; y trácese ΓB . Así pues, como $\Lambda\Gamma\text{B}$ es un ángulo en el semicírculo $\text{AB}\Gamma$, entonces el (ángulo) $\Lambda\Gamma\text{B}$ es recto [III 31]. Luego el cuadrado de AB es igual a los cuadrados de $\Lambda\Gamma$, ΓB [I 47]. De modo que el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de $\Lambda\Gamma$ en el cuadrado de ΓB . Pero $\Lambda\Gamma$ es igual a $\Lambda\Xi$. Luego el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de $\Lambda\Xi$ en el cuadrado de ΓB . Pues bien, si tomamos la (recta) ΞP igual a ΓB , el cuadrado de AB es mayor que el cuadrado de $\Lambda\Xi$ en el cuadrado de ΞP . Que es lo que se ha propuesto hacer.



⁵⁶ Euclides, como de costumbre, presenta la prueba para un sólo caso, aquel en que Ξ , el centro del círculo que circunscribe al triángulo HAN , cae dentro del triángulo. La prueba de los otros dos casos aparece en el texto griego detrás de la cláusula *hóper édei poiêsai*. Esta posición hace suponer que las pruebas no son de Euclides sino que se trata de una interpolación (Cf. HEATH, *op. cit.*, III; pág. 319). Al final del lema aparece la insólita cláusula *hóper proêkeito poiêsai*, en vez de la habitual *hóper édei poiêsai*.

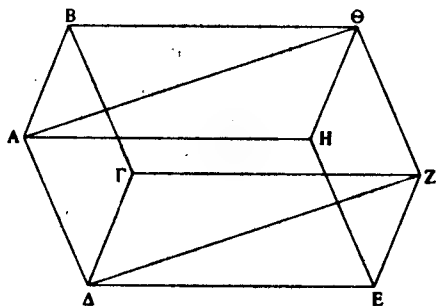
PROPOSICIÓN 24

Si un sólido es comprendido por planos paralelos, sus planos opuestos son iguales y paralelogramos.

Sea comprendido el sólido $\Gamma\Delta\Theta\text{H}$ por los planos paralelos $\Delta\Gamma$, HZ , $\text{A}\Theta$, ΔZ , BZ , AE .

Digo que sus planos opuestos son iguales y paralelogramos.

Pues como los dos planos paralelos BH , ΓE se cortan por el plano $\Delta\Gamma$, sus secciones comunes son paralelas [XI 16]. Entonces AB es paralela a $\Delta\Gamma$. Como los dos planos paralelos BZ , AE se cortan a su vez por el plano $\Delta\Gamma$, sus secciones comunes son



paralelas [XI 16]. Entonces $\text{B}\Gamma$ es paralela a $\text{A}\Delta$. Pero se ha demostrado que AB es paralela a $\Delta\Gamma$; luego $\text{A}\Gamma$ es un paralelogramo. De manera semejante demostraríamos que cada uno de los (planos) ΔZ , ZH , HB , BZ , AE es un paralelogramo.

Trácese las (rectas) $\text{A}\Theta$, ΔZ . Y como AB es paralela a $\Delta\Gamma$ y $\text{B}\Theta$ a ΓZ , entonces las dos rectas que se tocan AB , $\text{B}\Theta$ son paralelas a las dos rectas que se tocan $\Delta\Gamma$, ΓZ sin estar en el mismo plano. Luego comprenderán ángulos iguales [XI 10]. Por tanto el ángulo $\text{AB}\Theta$ es igual al (ángulo) $\Delta\Gamma\text{Z}$. Y como los dos (lados)

AB , $\text{B}\Theta$ son iguales a los dos (lados) $\Delta\Gamma$, ΓZ [I 34], y el (ángulo) $\text{AB}\Theta$ es igual al ángulo $\Delta\Gamma\text{Z}$, entonces la base $\text{A}\Theta$ es igual a la base ΔZ , y el triángulo $\text{AB}\Theta$ es igual al triángulo $\Delta\Gamma\text{Z}$ [I 4]. Ahora bien, el paralelogramo BH es el doble del (triángulo) $\text{AB}\Theta$ y el paralelogramo ΓE es doble del (triángulo) $\Delta\Gamma\text{Z}$ [I 34]; luego el paralelogramo BH es igual al paralelogramo ΓE . De manera semejante demostraríamos que el (paralelogramo) $\text{A}\Gamma$ es igual al (paralelogramo) HZ y el (paralelogramo) AE al (paralelogramo) BZ .

Por consiguiente, si un sólido es comprendido por planos paralelos, sus planos opuestos son iguales y paralelogramos. Q. E. D. ⁵⁷.

PROPOSICIÓN 25

Si un sólido paralelepípedo ⁵⁸ es cortado por un plano que sea paralelo a los planos opuestos, entonces, como la base es a la base, así será el sólido al sólido.

Sea cortado, pues, el sólido paralelepípedo $\text{AB}\Gamma\Delta$ por el plano ZH que es paralelo a los planos opuestos PA , $\Delta\Theta$.

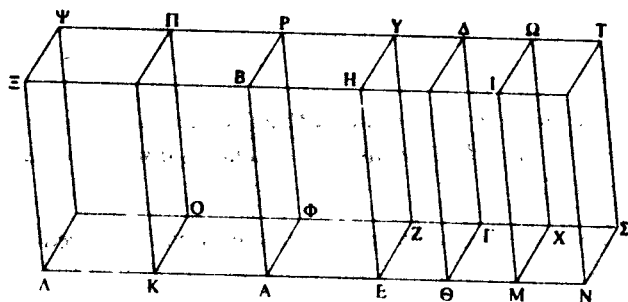
⁵⁷ Como señala Heiberg, el enunciado de esta proposición es defectuoso, pues no dice expresamente que el cuerpo que se considera está limitado sólo por seis planos. Un enunciado más correcto sería: «Si un sólido está comprendido por seis planos paralelos dos a dos, las caras opuestas son paralelogramos respectivamente iguales y semejantes.»

Simson añade «semejantes» porque esta condición es necesaria para que, en la proposición siguiente, la igualdad de los paralelepípedos se pruebe a partir de la def. 10 del libro XI.

⁵⁸ El adjetivo *parallēlepípedos* aparece por primera vez aquí sin ninguna explicación o definición como sucedía con el término *parallēlógramon*. Aunque significa «de planos paralelos», se aplica específicamente a los sólidos que son comprendidos por seis planos paralelos dos a dos.

Digo que como la base $AEZ\Phi$ es a la base $E\Theta\Gamma Z$, así el sólido $ABZY$ es al sólido $EH\Gamma\Delta$.

Pues prolongúese $A\Theta$ por cada lado y hágase un número cualquiera de (rectas) AK, KA iguales a AE , y un número cualquiera de (rectas) $\Theta M, MN$ iguales a $E\Theta$, y complétense los paralelogramos $AO, K\Phi, \Theta X, M\Sigma$ y los sólidos $\Lambda\Pi, KP, \Delta M, MT$.



Ahora bien, como las rectas $\Lambda K, KA, AE$ son iguales entre sí, los paralelogramos $\Lambda O, K\Phi, AZ$ son también iguales entre sí, y $K\Sigma, KB, AH$ (son iguales) entre sí y además $\Lambda\Psi, K\Pi, AP$ (son iguales) entre sí: porque son opuestos [XI 24].

Por la misma razón, los paralelogramos $E\Gamma, \Theta X, M\Sigma$ son también iguales entre sí, y los (paralelogramos) $\Theta H, \Theta I, IN$ son también iguales entre sí, y además los (paralelogramos) $\Delta\Theta, M\Omega, NT$ son iguales entre sí; entonces, en los sólidos $\Lambda\Pi, KP, AY$ tres planos son iguales a tres planos. Y los tres planos son iguales a los tres opuestos. Luego los tres sólidos $\Lambda\Pi, KP, AY$ son iguales entre sí.

Las caras opuestas en cada grupo de sólidos en esta proposición no sólo son iguales sino también semejantes. Euclides infiere la igualdad de los sólidos a partir de XI Def. 10. Según explicamos en la nota 47, esta definición es válida sólo en el caso de que los ángulos sólidos no estén comprendidos por más de tres ángulos planos.

Por lo mismo, los tres sólidos $E\Delta, \Delta M, MT$ son iguales entre sí; así pues, cuantas veces la base ΛZ es múltiplo de la base AZ , tantas es múltiplo el sólido ΛY del sólido AY .

Por lo mismo, cuantas veces la base NZ es múltiplo de la base $Z\Theta$, tantas es múltiplo el sólido NY del sólido ΘY . Y si la base ΛZ es igual a la base NZ , el sólido ΛY es igual al sólido NY , y si la base ΛZ excede a la base NZ , el sólido ΛY excede al sólido NY , y si (uno) es deficiente el (otro) es deficiente. Por tanto, habiendo cuatro magnitudes, a saber: las dos bases $AZ, Z\Theta$ y los dos sólidos $AY, Y\Theta$, se han tomado como equimúltiplos de la base AZ y del sólido AY , la base ΛZ y el sólido ΛY , y de la base ΘZ y el sólido ΘY , la base NZ y el sólido NY , y se ha demostrado que si la base ΛZ excede a la base NZ , el sólido ΛY excede también al sólido NY , y si es igual, es igual y si es deficiente, es deficiente.

Por consiguiente, como la base AZ es a la base $Z\Theta$, así el sólido AY al sólido $Y\Theta$. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 26

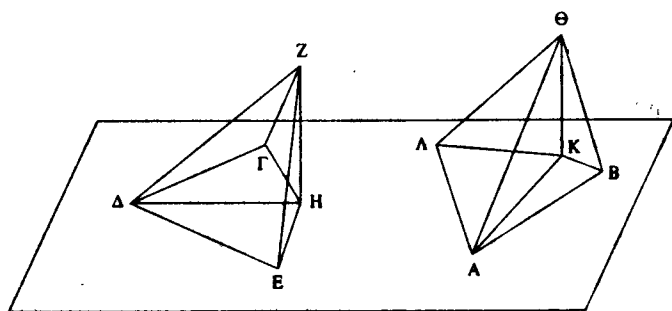
Construir un ángulo sólido igual a un ángulo sólido dado sobre una recta dada y en uno de sus puntos.

Sea AB la recta dada y A el punto dado en ella y sea el (ángulo) correspondiente a Δ el ángulo dado, comprendido por los ángulos planos $E\Delta\Gamma, E\Delta Z, Z\Delta\Gamma$.

Así pues, hay que construir un ángulo sólido igual al ángulo sólido correspondiente a Δ sobre la recta AB y en su punto A .

Tómese al azar un punto Z en la (recta) ΔZ ; trácese ZH desde el (punto) Z perpendicular al plano que pasa por $E\Delta, \Delta\Gamma$ [XI 11], y únase con el plano en el (punto) H ; trácese ΔH y constrúyase sobre la recta AB y en su punto A el (ángulo) BAA igual al

ángulo $\text{E}\Delta\Gamma$, y el (ángulo) BAK igual al ángulo $\text{E}\Delta\text{H}$ [I 23]; hágase AK igual a ΔH y levántese desde el punto K la (recta) $\text{K}\Theta$ formando ángulos rectos con el plano que pasa por $\text{BA}\Lambda$ [XI 12]; hágase $\text{K}\Theta$ igual a HZ y trácese ΘA .



Digo que el ángulo sólido correspondiente a A , comprendido por los ángulos $\text{BA}\Lambda$, $\text{BA}\Theta$, $\Theta\text{A}\Lambda$ es igual al ángulo sólido correspondiente a Δ , comprendido por los ángulos $\text{E}\Delta\Gamma$, $\text{E}\Delta\text{Z}$, $\text{Z}\Delta\Gamma$.

Pues tómense las (rectas) iguales AB , ΔE y trácense ΘB , KB , ZE , HE . Y como ZH es ortogonal al plano de referencia, entonces hará ángulos rectos con todas las (rectas) que la tocan y están en el plano de referencia [XI Def. 3]; luego cada uno de los ángulos ZHA , ZHE es recto. Por lo mismo, cada uno de los ángulos ΘKA , ΘKB es también recto. Y como los dos (lados) KA , AB son iguales respectivamente a los dos (lados) HA , ΔE y comprenden ángulos iguales, entonces la base KB es igual a la base HE [I 4]. Pero $\text{K}\Theta$ es igual a HZ ; y comprenden ángulos rectos; entonces también ΘB es igual a ZE [I 4]. Como los dos (lados) AK , $\text{K}\Theta$ son a su vez iguales a los dos (lados) ΔH , HZ y comprenden ángulos rectos, entonces la base $\text{A}\Theta$ es igual a la base $\text{Z}\Delta$ [I 4]. Pero AB es igual también a ΔE ; entonces los dos (lados) ΘA , AB son iguales a los dos (lados) ΔZ , ΔE . Y la base ΘB es igual a la base ZE ; luego el ángulo $\text{BA}\Theta$ es igual al ángulo $\text{E}\Delta\text{Z}$ [I

8]. Por lo mismo, el (ángulo) $\Theta\text{A}\Lambda$ es también igual al (ángulo) $\text{Z}\Delta\Gamma$. Y el (ángulo) $\text{BA}\Lambda$ es también igual al (ángulo) $\text{E}\Delta\Gamma$.

Por consiguiente, se ha construido (un ángulo sólido) igual al ángulo sólido dado correspondiente a Δ , sobre la recta dada AB y en su punto dado A . Q. E. F.

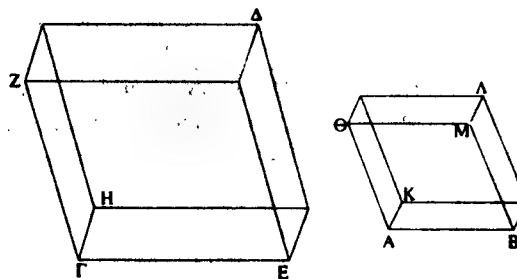
PROPOSICIÓN 27

Trazar sobre una recta dada un sólido paralelepípedo semejante y situado de manera semejante a un sólido paralelepípedo dado.

Sea AB la recta dada y $\Gamma\Delta$ el sólido paralelepípedo dado.

Así pues, hay que trazar sobre la recta dada AB un sólido paralelepípedo semejante y situado de manera semejante al sólido paralelepípedo dado $\Gamma\Delta$.

Constrúyase, pues, en la recta AB y en su punto A un (ángulo) igual al ángulo sólido correspondiente a Γ comprendido por los (ángulos) $\text{BA}\Theta$, ΘAK , KAB , de modo que el (ángulo) $\text{BA}\Theta$



sea igual al ángulo $\text{E}\Gamma\text{Z}$, el (ángulo) BAK al (ángulo) $\text{E}\Gamma\text{H}$ y el (ángulo) $\text{KA}\Theta$ al (ángulo) $\text{H}\Gamma\text{Z}$; y hágase de forma que, como $\text{E}\Gamma$ es a ΓH , así BA a AK , y como $\text{H}\Gamma$ es a ΓZ , así KA a $\text{A}\Theta$ [VI 12].

Luego, por igualdad, como EF es a FZ , así BA a $A\Theta$ [V 22]. Complétese el paralelogramo ΘB y el sólido AA .

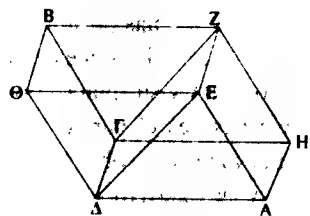
Y dado que, como EF es a FZ , así BA a AK , y los lados que comprenden los ángulos iguales EFH , BAK son proporcionales, entonces el paralelogramo HE es semejante al paralelogramo KB . Por lo mismo, el paralelogramo $K\Theta$ es semejante al paralelogramo HZ y ZE a ΘB ; luego tres paralelogramos del sólido ΓA son semejantes a tres paralelogramos del sólido AA . Pero los tres primeros son iguales y semejantes a los tres opuestos y los otros tres son también iguales y semejantes a los tres opuestos; luego el sólido entero ΓA es semejante al sólido entero AA [XI Def. 9].

Por consiguiente, se ha trazado sobre la recta dada AB el sólido paralelepípedo AA semejante y situado de manera semejante al dado ΓA . Q. E. F.

PROPOSICIÓN 28

Si un sólido paralelepípedo es cortado por un plano según las diagonales de los planos opuestos, el sólido será dividido en dos partes iguales por el plano.

Córtese, pues, el sólido paralelepípedo AB por el plano $\Gamma\Delta EZ$ según las diagonales FZ , ΔE de sus planos opuestos.



Digo que el sólido AB será dividido en dos partes iguales por el plano $\Gamma\Delta EZ$.

Pues como el triángulo ΓHZ es igual al triángulo ΓZB [I 34] y el (triángulo) $\Delta\Delta E$ al $\Delta E\Theta$, mientras que el paralelogramo ΓA es también igual al (parale-

logramo) EB : porque son opuestos; y HE (es igual) a $\Gamma\Theta$, entonces el prisma comprendido por los dos triángulos ΓHZ , $\Delta\Delta E$ y los tres paralelogramos HE , $A\Gamma$, ΓE es también igual al prisma comprendido por los dos triángulos ΓZB , $\Delta E\Theta$ y los tres paralelogramos $\Gamma\Theta$, BE , ΓE : porque son comprendidos por planos iguales en número y tamaño. De modo que el sólido entero AB ha sido dividido en dos partes iguales por el plano $\Gamma\Delta EZ$. Q. E. D.⁵⁹

PROPOSICIÓN 29

Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura, y en los que (los extremos superiores) de las aristas laterales están en las mismas rectas son iguales entre sí⁶⁰.

Estén sobre la misma base AB y tengan la misma altura los sólidos paralelepípedos ΓM , ΓN en los que (los extremos de) las

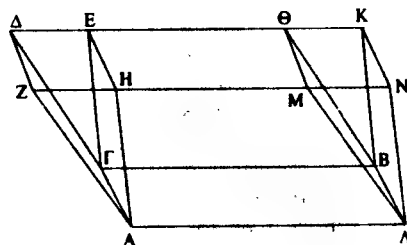
⁵⁹ Simson observa que se debería haber probado que las diagonales de dos caras opuestas están en un plano antes de decir que se trace el plano que pasa a través de ellas. Pero hay una dificultad más importante que parece haberle pasado desapercibida. Euclides presenta dos prismas comprendidos por caras iguales (de hecho son iguales y semejantes) e infiere directamente que los prismas son iguales. Pero no son iguales en el sentido en que se ha empleado el término hasta ahora, es decir en el de que pueden ser aplicados uno a otro. No pueden ser aplicados así porque las caras, aunque son iguales respectivamente, no están situadas de manera semejante; en consecuencia los prismas son simétricos y debe ser probado que, aunque no son iguales y semejantes, son equivalentes, como ha sugerido Legendre (Cf. HEATH, *op. cit.*, III, págs. 331-33).

⁶⁰ *Hai ephestōsai o hai ephestēkytai* quiere decir literalmente «las (rectas) levantadas». MUGLER traduce (*op. cit.*, pág. 210) por «aristas laterales», pero en este contexto, habría que aclarar que se trata de los extremos o vértices de tales aristas.

aristas laterales AH, AZ, AM, AN, ΓΔ, ΓE, BΘ, BK están en las mismas rectas ZN, AK.

Digo que el sólido ΓM es igual al sólido ΓN.

Pues como cada una de las (figuras) ΓΘ, ΓK es un paralelogramo, ΓB es igual a cada una de las (rectas) ΔΘ, EK [I 34]; de modo que ΔΘ es igual a EK. Quítese de ambas EΘ; entonces la (recta) restante ΔE es igual a la (recta) restante ΘK. De modo



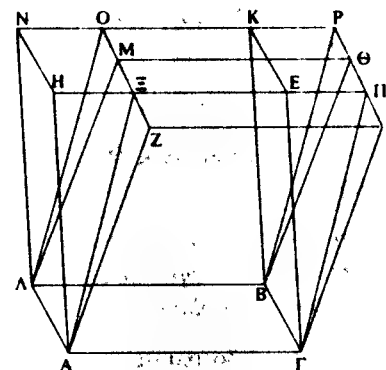
que el triángulo ΔΓE es también igual al triángulo ΘBK [I 8, 4] y el paralelogramo ΔH al paralelogramo ΘN [I 36]. Por lo mismo, el triángulo AZH es también igual al triángulo MAN. Pero el paralelogramo ΓZ es también igual al paralelogramo BM y el (paralelogramo) ΓH al (paralelogramo) BN: porque son opuestos. Luego el prisma comprendido por los dos triángulos AZH, ΔΓE y los tres paralelogramos AΔ, ΔH, ΓH es igual al prisma comprendido por los dos triángulos MAN, ΘBK y los tres paralelogramos BM, ΘN, BN. Añádase a uno y otro el sólido cuya base es el paralelogramo AB y su (plano) opuesto HEΘM; entonces el sólido paralelepípedo entero ΓM es igual al sólido paralelepípedo entero ΓN.

Por consiguiente, los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura y en los que (los extremos superiores) de las aristas laterales están en las mismas rectas son iguales entre sí. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 30

Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura y en los que (los extremos superiores de) las aristas laterales no están en las mismas rectas son iguales entre sí.

Estén sobre la misma base, AB, y tengan la misma altura los sólidos paralelepípedos ΓM, ΓN en los que (los extremos superiores de) las aristas laterales AZ, AH, AM, AN, ΓΔ, ΓE, BΘ, BK no están en las mismas rectas.



Digo que el sólido ΓM es igual al sólido ΓN.

Prolónguense NK, ΔΘ y únanse en P y además prolónguense ZM, HE hasta O, Π, y trácense AΞ, ΛO, ΓΠ, BP. Entonces el sólido ΓM cuya base es el paralelogramo AΓBA y su (plano) opuesto ZΔΘM es igual al sólido ΓO cuya base es el paralelogramo AΓBA y su (plano) opuesto ΞΠPO: porque están sobre la misma base AΓBA y tienen la misma altura y (los extremos superiores de) las aristas laterales AZ, AΞ, AM, ΛO, ΓΔ, ΓΠ, BΘ, BP están en

las mismas rectas ZO, AP [XI 29]. Pero el sólido ΓO cuya base es el paralelogramo $\Delta\Gamma\Delta$ y su (plano) opuesto $\Xi\Pi\Theta$ es igual al sólido ΔN cuya base es el paralelogramo $\Delta\Gamma\Delta$ y su (plano) opuesto HEKN : porque a su vez está sobre la misma base $\Delta\Gamma\Delta$ y tiene la misma altura y (los extremos superiores de) sus aristas laterales ΔH , $\Delta\Xi$, ΓE , $\Gamma\Pi$, ΔN , ΔO , BK , BP están en las mismas rectas HP , NP . De modo que el sólido ΓM es también igual al sólido ΓN .

Por consiguiente, los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura y en los que (los extremos superiores de) las aristas laterales no están en las mismas rectas son iguales. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 31

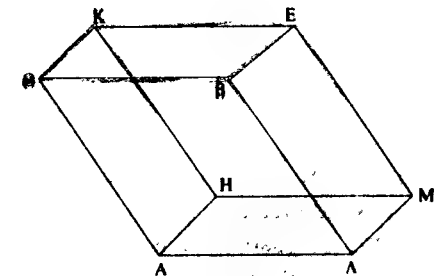
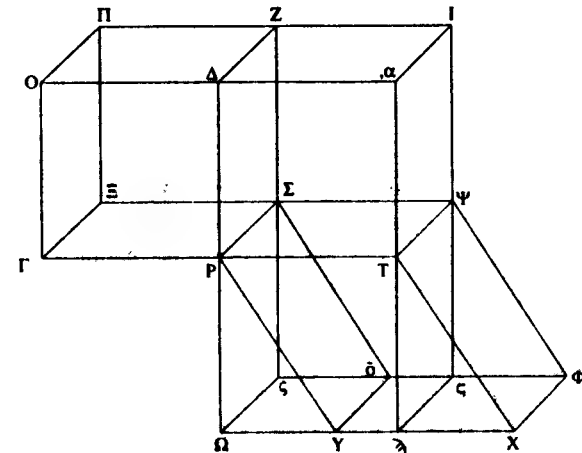
Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura son iguales entre sí.

Estén los sólidos paralelepípedos AE , ΓZ sobre las bases iguales AB , $\Gamma\Delta$, y tengan la misma altura.

Digo que el sólido AE es igual al sólido ΓZ .

Formen ángulos rectos, en primer lugar, las aristas laterales ΘK , BE , ΔH , ΔM , OP , ΔZ , $\Gamma\Xi$, $P\Sigma$ con las bases AB , $\Gamma\Delta$ y sea PT el resultado de prolongar en línea recta la recta ΓP , y constrúyase en la recta PT y en su punto P el (ángulo) TPY igual al (ángulo) $\Delta\Lambda B$ [I 23]; hágase PT igual a $\Delta\Lambda$ y PY igual a ΔB y complétese la base PX y el sólido ΨY . Pues bien, como las dos (rectas) TP , PY son iguales a las dos (rectas) $\Delta\Lambda$, ΔB y comprenden ángulos iguales, entonces el paralelogramo PX es igual y semejante al paralelogramo $\Theta\Lambda$. Y como $\Delta\Lambda$ es a su vez igual a PT y ΔM a $P\Sigma$, y comprenden ángulos rectos, entonces el paralelogramo

PY es igual y semejante al paralelogramo ΔM . Por lo mismo, el (paralelogramo) ΔE es igual y semejante al (paralelogramo) ΣY ;



luego tres paralelogramos del sólido AE son iguales y semejantes a tres paralelogramos del sólido ΨY . Pero los tres primeros son iguales y semejantes a los tres opuestos y los otros tres a los tres opuestos [XI 24]; luego el sólido paralelepípedo entero AE es igual al sólido paralelepípedo entero ΨY [XI Def. 10]. Trácese ΔP , XY y encuéntrense en el (punto) Ω , y a través de T , trácese $\alpha T \Delta$ paralela a $\Delta\Omega$, y prolonguese $\text{O}\Delta$ hasta α , y

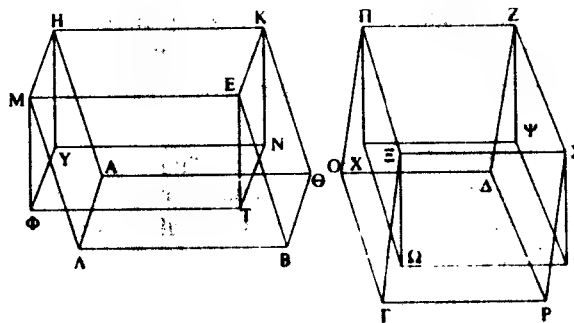
complétense los sólidos $\Omega\Psi$, Π . Entonces el sólido $\Psi\Omega$ cuya base es el paralelogramo $P\Psi$ y su (cara) opuesta $\Omega\zeta$ es igual al sólido $\Psi\Upsilon$ cuya base es el paralelogramo $P\Psi$ y su (cara) opuesta $\Upsilon\Phi$: porque están sobre la misma base $P\Psi$ y tienen la misma altura y (los extremos superiores de) sus aristas laterales $P\Omega$, $P\Upsilon$, $T\lambda$, TX , $\Sigma\zeta$, $\Sigma\delta$, $\Psi\zeta$, $\Psi\Phi$ están sobre las mismas rectas ΩX , $\zeta\Phi$ [XI 29]. Pero el sólido $\Psi\Upsilon$ es igual al sólido AE . Luego el sólido $\Psi\Omega$ es también igual al sólido AE . Ahora bien, como el paralelogramo $PYXT$ es igual al paralelogramo ΩT —porque están sobre la misma base, PT , y entre las mismas paralelas PT , ΩX [I 35]— mientras que el (paralelogramo) $PYXT$ es igual al (paralelogramo) $\Gamma\Delta$ —porque es igual también a AB —, entonces el (paralelogramo) ΩT es también igual al (paralelogramo) $\Gamma\Delta$. Pero ΔT es otro (paralelogramo); luego, como la base $\Gamma\Delta$ es a ΔT , así ΩT a ΔT [V 7]. Ahora bien, puesto que el sólido paralelepípedo Π ha sido cortado por el plano PZ , que es paralelo a los planos opuestos, como la base $\Gamma\Delta$ es a la base ΔT , así el sólido ΓZ al sólido Π [XI 25]. Por lo mismo, puesto que el sólido paralelepípedo Ω ha sido cortado por el plano $P\Psi$ que es paralelo a los planos opuestos, como la base ΩT es a la base ΔT , así el sólido $\Omega\Psi$ al (sólido) Π [XI 25]. Pero como la base $\Gamma\Delta$ es a la base ΔT , así ΩT a ΔT ; entonces, como el sólido ΓZ es al sólido Π , así el sólido $\Omega\Psi$ al sólido Π [V 11]. Luego cada uno de los sólidos ΓZ , $\Omega\Psi$ guarda la misma razón con Π ; así pues, el sólido ΓZ es igual al sólido $\Omega\Psi$ [V 9]. Pero se ha demostrado que $\Omega\Psi$ es igual a AE ; por tanto, AE es también igual a ΓZ .

Ahora no formen ángulos rectos las aristas laterales AH , ΘK , BE , ΛM , ΓN , OP , ΔZ , $P\Sigma$ con las bases AB , $\Gamma\Delta$.

Digo una vez más que el sólido AE es igual al sólido ΓZ .

Pues trácense desde los puntos K , E , H , M , Π , Z , N , Σ hasta el plano de referencia las perpendiculares $K\Xi$, ET , HY , $M\Phi$, ΠX , $Z\Psi$, $N\Omega$, ΣI , y únanse con el plano en los puntos Ξ , T , Y , Φ , X , Ψ , Ω , I , y trácense ΞT , ΞY , $Y\Phi$, $T\Psi$, $X\Omega$, ΩI , $I\Psi$. Entonces el sólido

$K\Phi$ es igual al sólido Π : porque están sobre las bases iguales KM , $\Pi\Sigma$ y tienen la misma altura y sus aristas laterales forman ángulos rectos con las bases [1ª parte de la proposición]. Pero



el sólido $K\Phi$ es igual al sólido AE , y el (sólido) Π al (sólido) ΓZ : porque están sobre la misma base y tienen la misma altura y (los extremos superiores de) sus aristas laterales no están sobre las mismas rectas [XI 30]. Luego el sólido AE es igual al sólido ΓZ .

Por consiguiente, los sólidos paralelogramos que están sobre bases iguales y tienen la misma altura son iguales entre sí. Q. E. D.

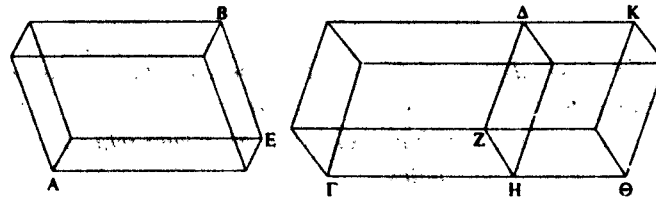
PROPOSICIÓN 32

Los sólidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

Tengan la misma altura los sólidos paralelepípedos AB , $\Gamma\Delta$.

Digo que los sólidos paralelepípedos AB , $\Gamma\Delta$ son entre sí como sus bases, es decir que como la base AE es a la base ΓZ , así el sólido AB al sólido $\Gamma\Delta$.

Aplíquese, pues, a la (recta) ZH el (paralelogramo) ZΘ igual a AE [I 45], y a partir de la base ZΘ y de la misma altura que la de ΓΔ, complétense el sólido paralelepípedo HK. Entonces el sólido AB es igual al sólido HK: porque están sobre bases iguales



AE, ZΘ y (tienen) la misma altura [XI 31]. Y puesto que el sólido paralelepípedo ΓΚ ha sido cortado por el plano ΔΗ que es paralelo a los planos opuestos, entonces, como la base ΓΖ es a la base ΖΘ, así el sólido ΓΔ al sólido ΔΘ [XI 25]. Pero la base ΖΘ es igual a la base AE y el sólido HK al sólido AB; luego, como la base AE es a la base ΓΖ, así el sólido AB al sólido ΓΔ.

Por consiguiente, los sólidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 33

Los sólidos paralelepípedos semejantes guardan entre sí una razón triplicada de la de sus lados correspondientes.

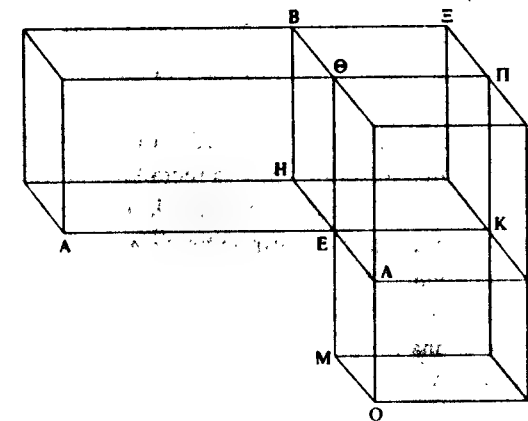
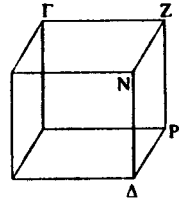
Sean AB, ΓΔ sólidos paralelepípedos semejantes y sea el (lado) AE correspondiente al (lado) ΓΖ.

Digo que el sólido AB guarda con el sólido ΓΔ una razón triplicada de la que el (lado) AE (guarda con) el (lado) ΓΖ.

Sean EK, ΕΛ, ΕΜ el resultado de prolongar en línea recta las (rectas) AE, HE, ΘΕ: hágase EK igual a ΓΖ, ΕΛ igual a ΖΝ, y ade-

más EM igual a ΖΡ; y complétense el paralelogramo ΚΛ y el sólido ΚΟ.

Ahora bien, como los dos (lados) KE, ΕΛ son iguales a los dos (lados) ΓΖ, ΖΝ, mientras que el ángulo ΚΕΛ es igual al ángulo ΓΖΝ: porque también el (ángulo) ΑΕΗ es igual al (ángulo) ΓΖΝ por la semejanza de los sólidos AB, ΓΔ; entonces el paralelogramo ΚΛ es igual al paralelogramo ΓΝ. Por lo mismo el paralelogramo ΚΜ es también igual y semejante al (paralelogramo) ΓΡ y además el (paralelogramo) ΕΟ al ΔΖ; luego tres paralelogramos del sólido ΚΟ son iguales y semejantes a tres paralelogramos del sólido ΓΔ. Pero los tres primeros son iguales y semejantes a sus tres opuestos y los otros tres a sus opuestos [XI 24]; luego el sólido entero ΚΟ es igual y semejante al sólido entero ΓΔ [XI Def. 10]. Complétense el



paralelogramo HK y, tomando como bases los paralelogramos HK, ΚΛ y con la misma altura que la de AB, complétense los sólidos ΕΕ, ΑΠ. Y puesto que, por la semejanza de los sólidos

AB, $\Gamma\Delta$, como AE es a ΓZ , así EH a ZN y E Θ a ZP, mientras que ΓZ es igual a EK, ZN a E Λ y ZP a EM, entonces, como AE es a EK, así HE a E Λ y ΘE a EM. Pero como AE es a EK, así el (paralelogramo) AH al paralelogramo HK, mientras que, como HE es a E Λ , así HK a K Λ , y como ΘE es a EM, así PE a KM [VI 1]; luego también, como el (paralelogramo) AH es al HK, así el (paralelogramo) HK al (paralelogramo) K Λ y el (paralelogramo) PE al (paralelogramo) KM. Pero como el (paralelogramo) AH es al (paralelogramo) HK, así el sólido AB al sólido E Ξ , mientras que, como el (paralelogramo) HK es al (paralelogramo) K Λ , así el sólido E Ξ al sólido P Λ , y como el (paralelogramo) PE es al (paralelogramo) KM, así el sólido P Λ al sólido KO [XI 32]; luego, como el sólido AB es al sólido E Ξ , así el (sólido) E Ξ al (sólido) P Λ y el (sólido) P Λ al (sólido) KO. Pero si cuatro magnitudes están en proporción continua, la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que (guarda) con la segunda [V Def. 10]; luego el sólido AB guarda con el sólido KO una razón triplicada de la que AB guarda con E Ξ . Pero como el (sólido) AB es al (sólido) E Ξ , así el paralelogramo AH al (paralelogramo) HK y la recta AE a la recta EK [VI 1]; de modo que el sólido AB guarda con el sólido KO una razón triplicada de la que AE guarda con EK. Ahora bien, el sólido KO es igual al sólido $\Gamma\Delta$, y la recta EK a la (recta) ΓZ ; por tanto, el sólido AB guarda con el sólido $\Gamma\Delta$ una razón triplicada de la que su lado correspondiente AE guarda con el lado correspondiente ΓZ .

Por consiguiente, los sólidos paralelepípedos semejantes guardan entre sí una razón triplicada de la de sus lados correspondientes. Q. E. D.

Porisma:

A partir de esto queda claro que, si cuatro rectas son (continuamente) proporcionales, como la primera es a la cuarta, así el sólido paralelepípedo (construido) a partir de la primera al

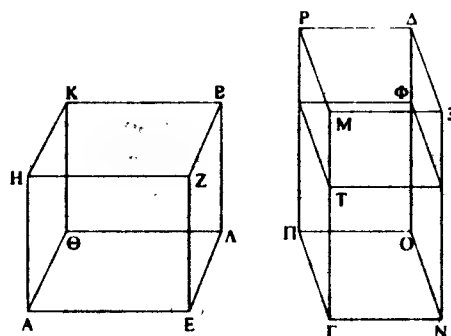
semejante y construido de manera semejante sobre la segunda, porque también la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que (guarda) con la segunda ⁶¹.

PROPOSICIÓN 34

Las bases de los sólidos paralelepípedos iguales están inversamente relacionadas con las alturas; y aquellos sólidos paralelepípedos cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas son iguales.

Sean AB, $\Gamma\Delta$ sólidos paralelepípedos iguales.

Digo que las bases de los sólidos paralelepípedos AB, $\Gamma\Delta$ están inversamente relacionadas con sus alturas, (es decir que)



como la base E Θ es a la base N Π , así la altura del sólido $\Gamma\Delta$ a la altura del sólido AB.

⁶¹ Heiberg duda de la autenticidad del porisma. Por otra parte, Simson añade un teorema muy útil que esperaríamos encontrar en este lugar por analogía con VI 23 —en relación con VI 19-20—: «Los paralelepípedos contenidos por paralelogramos respectivamente equiángulos, esto es cuyos ángulos sólidos son entre sí iguales, están uno a otro en la razón compuesta de las razones de sus lados» (Cf. SIMSON, *op. cit.*, pág. 232, prop. D).

Formen, pues, en primer lugar, ángulos rectos con sus bases las aristas laterales AH , EZ , AB , ΘK , ΓM , $N\Xi$, OA , ΠP .

Digo que como la base $E\Theta$ es a la base $N\Pi$, así ΓM a AH .

Así pues, si la base $E\Theta$ es igual a la base $N\Pi$ y el sólido AB es igual al sólido $\Gamma\Delta$, ΓM será también igual a AH : porque los sólidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases [XI 32]. Y como la base $E\Theta$ es a la (base) $N\Pi$, así ΓM a AH , y está claro que las bases de los sólidos paralelepípedos AB , $\Gamma\Delta$ están inversamente relacionadas con sus alturas.

Ahora no sea igual la base $E\Theta$ a la base $N\Pi$, sino que es mayor $E\Theta$. Pero el sólido AB es igual al sólido $\Gamma\Delta$, entonces ΓM es también mayor que AH . Así pues, hágase ΓT igual a AH y complétese, sobre la base $N\Pi$ y con la altura ΓT , el sólido paralelepípedo $\Phi\Gamma$. Y como el sólido AB es igual al sólido $\Gamma\Delta$ y el (sólido) $\Gamma\Phi$ está fuera y las (magnitudes) iguales guardan la misma razón con una misma (magnitud) [V 7], entonces, como el sólido AB es al sólido $\Gamma\Phi$, así el sólido $\Gamma\Delta$ al sólido $\Gamma\Phi$. Pero como el sólido AB es al sólido $\Gamma\Phi$, así la base $E\Theta$ a la base $N\Pi$: porque los sólidos AB , $\Gamma\Phi$ son de la misma altura [XI 32]; pero como el sólido $\Gamma\Delta$ es al sólido $\Gamma\Phi$, así la base $M\Pi$ a la base ΠT [XI 25] y ΓM a ΓT [VI 1]; luego como la base $E\Theta$ es a la base $N\Pi$, así $M\Gamma$ a ΓT . Pero ΓT es igual a AH ; entonces, como la base $E\Theta$ es a la base $N\Pi$, así $M\Gamma$ a AH . Luego las bases de los sólidos paralelepípedos AB , $\Gamma\Delta$ están inversamente relacionadas con las alturas.

Estén, ahora, las bases de los sólidos paralelepípedos AB , $\Gamma\Delta$ inversamente relacionadas con sus alturas, (es decir que) como la base $E\Theta$ es a la base $N\Pi$, así la altura del sólido $\Gamma\Delta$ a la altura del sólido AB .

Digo que el sólido AB es igual al sólido $\Gamma\Delta$.

Formen, a su vez, las aristas laterales ángulos rectos con las bases. Y si la base $E\Theta$ es igual a la base $N\Pi$, y como la base $E\Theta$ es a la base $N\Pi$, así la altura del sólido $\Gamma\Delta$ a la altura del sólido

lido AB , entonces la altura del sólido $\Gamma\Delta$ es igual a la altura del sólido AB . Pero los sólidos paralelepípedos que están sobre bases iguales y tienen la misma altura son iguales entre sí [XI 31]: luego el sólido AB es igual al sólido $\Gamma\Delta$.

Ahora no sea la base $E\Theta$ igual a la base $N\Pi$, sino que $E\Theta$ sea mayor. Entonces la altura del sólido $\Gamma\Delta$ es también mayor que la altura del sólido AB , es decir ΓM (mayor) que AH . Hágase de nuevo ΓT igual a AH , y complétese de manera semejante el sólido $\Gamma\Phi$. Y puesto que, como la base $E\Theta$ es a la base $N\Pi$, así $M\Gamma$ a AH , y AH es igual a ΓT , entonces, como la base $E\Theta$ es a la base $N\Pi$, así ΓM a ΓT . Pero como la (base) $E\Theta$ es a la base $N\Pi$, así el sólido AB al sólido $\Gamma\Phi$: porque los sólidos AB , $\Gamma\Phi$ son de la misma altura [XI 32]. Y como ΓM es a ΓT , así la base $M\Pi$ a la base ΠT [VI 1] y el sólido $\Gamma\Delta$ al sólido $\Gamma\Phi$; y como el sólido AB es al sólido $\Gamma\Phi$, así el sólido $\Gamma\Delta$ al sólido $\Gamma\Phi$; luego cada uno de los (sólidos) AB , $\Gamma\Delta$ guarda la misma razón con $\Gamma\Phi$. Por tanto, el sólido AB es igual al sólido $\Gamma\Delta$ [V 9].

Ahora no formen las aristas laterales ZE , BA , HA , ΘK , ΞN , ΔO , $M\Gamma$, ΠP ángulos rectos con sus bases y trácense, desde los puntos Z , H , B , K , Ξ , M , Δ , P , perpendiculares a los planos que pasan por $E\Theta$, $N\Pi$, y únense con los planos en los (puntos) Σ , T , Υ , Φ , χ , Ω , Ψ , ζ , y complétense los sólidos $Z\Phi$, $\Xi\Omega$.

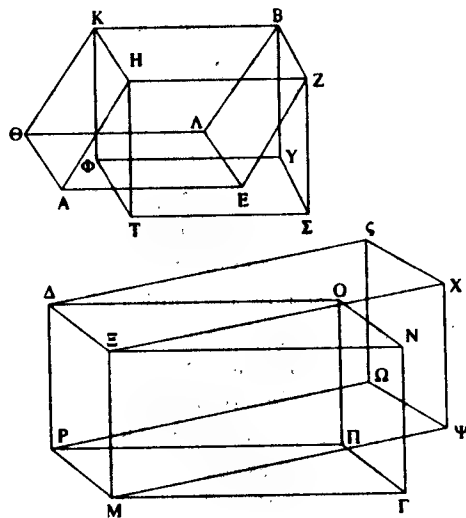
Digo que también en este caso, si los sólidos AB , $\Gamma\Delta$ son iguales, sus bases están inversamente relacionadas con sus alturas, (es decir que) como la base $E\Theta$ es a la base $N\Pi$, así la altura del sólido $\Gamma\Delta$ a la altura del sólido AB .

Puesto que el sólido AB es igual al sólido $\Gamma\Delta$, mientras que AB es igual a BT : porque están sobre la misma base, ZK , y tienen la misma altura [XI 29, 30]; pero el sólido $\Gamma\Delta$ es igual al sólido $\Delta\Psi$: porque están, a su vez, sobre la misma base ΞP y tienen la misma altura [id.]. Entonces, el sólido BT es igual al sólido $\Delta\Psi$; por tanto, como la base ZK es a la base ΞP , así la altura del sólido $\Delta\Psi$ a la altura del sólido BT [1ª parte]. Pero la base

ZK es igual a la base EΘ y la base EP a la base NΠ; entonces, como la base EΘ es a la base NΠ, así la altura del sólido ΔΨ a la altura del sólido BT. Pero las alturas de los sólidos ΔΨ, BT son las mismas que las de ΔΓ, BA; luego como la base EΘ es a la base NΠ, así la altura del sólido ΔΓ a la altura del sólido AB. Por tanto, las bases de los sólidos paralelepípedos AB, ΓΔ están inversamente relacionadas con sus alturas.

Ahora estén inversamente relacionadas con sus alturas las bases de los sólidos AB, ΓΔ (es decir que) como la base EΘ es a la base NΠ, así la altura del sólido ΓΔ a la altura del sólido AB.

Digo que el sólido AB es igual al sólido ΓΔ.



Pues, siguiendo la misma construcción, dado que, como la base EΘ es a la base NΠ, así la altura del sólido ΓΔ a la altura del sólido AB, y la base EΘ es igual a la base ZK, mientras que la (base) NΠ es igual a la base EP, entonces, como la base ZK es a la base EP, así la altura del sólido ΓΔ a la altura del sólido

AB. Pero los sólidos AB, ΓΔ y los sólidos BT, ΔΨ tienen las mismas alturas (respectivamente), entonces, como la base ZK es a la base EP, así la altura del sólido ΔΨ es a la altura del sólido BT. Luego las bases de los sólidos paralelepípedos BT, ΔΨ están inversamente relacionadas con sus alturas. Por tanto, el sólido BT es igual al sólido ΔΨ [1ª parte]. Pero el (sólido) BT es igual al sólido BA; porque están sobre la misma base, ZK, y tienen la misma altura [XI 29, 30]. Y el sólido ΔΨ es igual al sólido ΔΓ [id.].

Por consiguiente, el sólido AB es igual al sólido ΓΔ. Q. E. D.⁶²

PROPOSICION 35

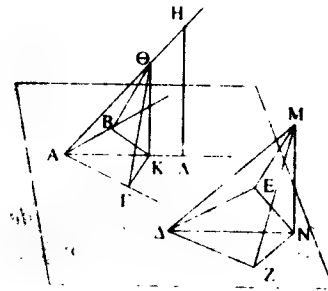
Si hay dos ángulos planos iguales y se levantan desde sus vértices rectas elevadas que comprendan ángulos iguales respectivamente con las rectas iniciales, y se toman unos puntos al azar en las rectas elevadas y, desde ellos, se trazan perpendiculares a los planos en los que están los ángulos iniciales y se trazan rectas de los puntos producidos en los planos a los (vértices de) los ángulos iniciales, (éstos) comprenderán con las rectas elevadas ángulos iguales⁶³.

Sean BAF, EAZ dos ángulos rectilíneos iguales y levántense desde los puntos A, Δ, las rectas elevadas AH, ΔM que compren-

⁶² Euclides asume sin prueba: a) que si dos paralelepípedos son iguales y tienen bases iguales, sus alturas son iguales, y b) que, si las bases de dos paralelepípedos iguales son desiguales, el que tiene la base mayor, tiene la altura menor (Cf. H. AM, *op. cit.*, pág. 349).

⁶³ Este largo enunciado se podría sintetizar de la siguiente manera. «En dos ángulos triedros iguales cada par de aristas homólogas forman ángulos iguales con el plano de las otras dos.»

dan con las rectas iniciales ángulos iguales respectivamente, a saber: el (ángulo) ΔAE (igual) al (ángulo) HAB y el (ángulo) ΔAZ al (ángulo) HAF ; tómense al azar los puntos H, M en las rectas $AH, \Delta M$, y trácense de los puntos H, M a los planos que pasan por BAF, EAZ , las perpendiculares HA, MN y únanse a los planos en los (puntos) N, Λ , y trácense $\Lambda A, \Delta \Lambda$.



Digo que el ángulo HAA es igual al ángulo $\Delta \Lambda N$.

Hágase $A\Theta$ igual a ΔM , y trácese por el punto Θ la (recta) ΘK paralela a HA . Pero HA es perpendicular al plano que pasa por BAF ; entonces ΘK también es perpendicular al plano que pasa por BAF [XI 8]. Trácense desde los puntos K, N las perpendiculares KI, NZ, KB, NE a las rectas $AB, AF, \Delta Z, \Delta E$ y trácense $\Theta I, \Gamma B, MZ, ZE$. Puesto que el (cuadrado) de ΘA es igual a los (cuadrados) de $\Theta K, KA$ y los (cuadrados) de $KI, \Gamma A$ son iguales al de KA [I 47], entonces el (cuadrado) de ΘA también es igual a los de $\Theta K, KI, \Gamma A$. Pero el (cuadrado) de ΘI es igual a los de $\Theta K, KI$ [I 47]; entonces el (cuadrado) de ΘA es igual a los de $\Theta I, \Gamma A$. Luego el ángulo ΘIA es recto [I 48]. Por lo mismo el ángulo ΔZM también es recto. Por tanto, el ángulo $A\Gamma\Theta$ es igual al ΔZM . Pero el (ángulo) ΘAI es igual al ángulo $\Delta \Lambda Z$. Luego $\Delta \Lambda Z, \Theta AI$ son dos triángulos que tienen dos ángulos iguales a dos ángulos respectivamente y un lado igual a un lado, el que subtiende uno de los ángulos iguales, es decir:

el (lado) ΘA (que es igual) a $\Delta \Lambda$; entonces tendrán los lados restantes iguales respectivamente a los lados restantes [I 26]. Por tanto, $A\Gamma$ es igual a ΔZ . De manera semejante demostraríamos que AB también es igual a ΔE . Pues bien, como $A\Gamma$ es igual a ΔZ y AB a ΔE , entonces los dos (lados) $\Gamma A, AB$ son iguales a los dos lados $\Delta \Lambda, \Delta E$. Pero el ángulo ΓAB es igual también al ángulo $\Delta \Lambda E$; entonces la base $B\Gamma$ es igual a la base EZ y el triángulo al triángulo y los ángulos restantes a los ángulos restantes [I 4]; por tanto, el ángulo $A\Gamma B$ es igual al ΔZE . Pero el ángulo recto $A\Gamma K$ es igual al (ángulo) recto ΔZN . Entonces el (ángulo) restante $B\Gamma K$ es también igual al (ángulo) restante EZN . Por lo mismo, el (ángulo) ΓBK es igual al (ángulo) ZEN . Luego $B\Gamma K, EZN$ son dos triángulos que tienen dos ángulos iguales a dos ángulos respectivamente y un lado a un lado, el correspondiente a los ángulos iguales, es decir $B\Gamma$ (que es igual) a EZ ; entonces tendrán los lados restantes iguales a los lados restantes [I 26]. Luego ΓK es igual a ZN . Pero $A\Gamma$ es también igual a ΔZ ; luego los dos (lados) $A\Gamma, \Gamma K$ son iguales a los dos (lados) $\Delta Z, ZN$; y comprenden ángulos rectos. Por tanto, la base AK es igual a la base ΔN [I 4]. Y como $A\Theta$ es igual a ΔM , el (cuadrado) de $A\Theta$ es igual al (cuadrado) de ΔM . Pero los (cuadrados) de $AK, K\Theta$ son iguales al (cuadrado) de $A\Theta$, porque el (ángulo) $AK\Theta$ es recto [I 47]; y los (cuadrados) de $\Delta N, NM$ son iguales al (cuadrado) de ΔM , porque el ángulo ΔNM es recto [I 47]. Entonces los (cuadrados) de $AK, K\Theta$ son iguales a los (cuadrados) de $\Delta N, NM$ y de ellos, el (cuadrado) de AK es igual al (cuadrado) de ΔN ; luego el (cuadrado) restante de $K\Theta$ es igual al (cuadrado) de NM ; por tanto, ΘK es igual a MN . Y como los dos (lados) $\Theta A, AK$ son iguales a los dos (lados) $\Delta \Lambda, \Delta N$ respectivamente, y se ha demostrado que la base ΘK es igual a la base MN , entonces el ángulo ΘAK es igual al ángulo $\Delta \Lambda N$ [I 8].

Por consiguiente, si hay dos ángulos planos iguales, y lo que sigue del enunciado.

Porisma:

A partir de esto queda claro que, si hay dos ángulos planos iguales y se levantan desde ellos rectas iguales que comprendan ángulos iguales respectivamente con las rectas iniciales, las perpendiculares trazadas desde (los extremos de) ellas hasta los planos en los que están los ángulos iniciales, son iguales entre sí. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 36

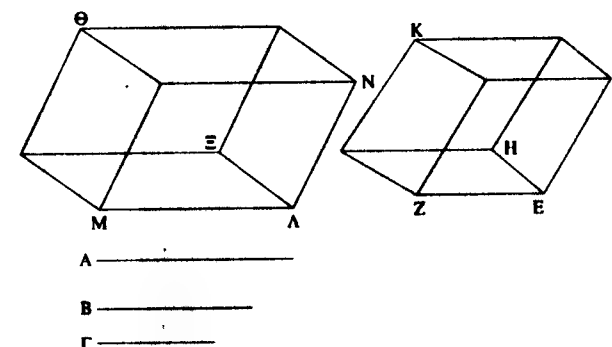
Si tres rectas son proporcionales, el sólido paralelepípedo (construido) a partir de ellas es igual al sólido paralelepípedo (construido) a partir de la media (proporcional), equilátero y equiangular con el antedicho sólido.

Sean proporcionales las tres rectas A, B, Γ , (es decir que) como A es a B, así B a Γ .

Digo que el sólido (construido) a partir de A, B, Γ es igual al sólido (construido) a partir de B, equilátero y equiangular con el antedicho.

Póngase el ángulo sólido correspondiente a E comprendido por los (ángulos) ΔEH , HEZ , $ZE\Delta$, y háganse las rectas ΔE , HE , EZ iguales a B respectivamente y complétese el sólido paralelepípedo EK; hágase AM igual a A y constrúyase sobre la recta AM y en su punto A un ángulo sólido igual al ángulo sólido correspondiente a E, el comprendido por los (ángulos) $NA\Xi$, ΞAM , MAN ; hágase $A\Xi$ igual a B y AN igual a Γ . Y dado que, como A es a B, así B a Γ , y A es igual a AM , y B a cada una de las (rectas) $A\Xi$, $E\Delta$, y Γ a AN ; entonces, como AM es a EZ , así ΔE a AN . Y los lados que comprenden los ángulos iguales NAM , ΔEZ están inversamente relacionados; entonces, el paralelogramo MN es igual al paralelogramo ΔZ [VI 14]. Aho-

ra bien, como ΔEZ , NAM son dos ángulos planos rectilíneos iguales y se han levantado sobre ellos las rectas $\Delta\Xi$, EH iguales entre sí y que comprenden ángulos iguales respectivamente con las rectas iniciales, entonces las perpendiculares trazadas

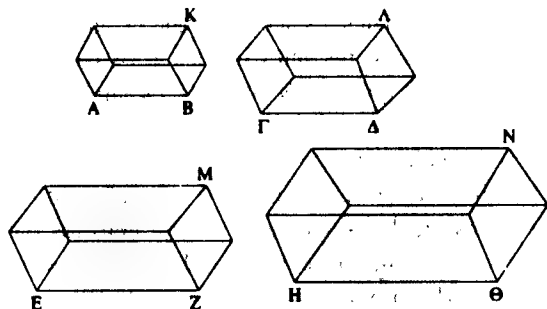


de los puntos H, Ξ a los planos que pasan por NAM , ΔEZ son iguales entre sí [XI 35 Por.]; de modo que los sólidos $\Lambda\Theta$, EK tienen la misma altura. Pero los sólidos paralelepípedos que están sobre bases iguales y (tienen) la misma altura son iguales entre sí [XI 31]; luego el sólido $\Theta\Lambda$ es igual al sólido EK . Y $\Lambda\Theta$ es el sólido (construido) a partir de A, B, Γ , y EK el sólido (construido) a partir de B; por tanto, el sólido paralelepípedo (construido) a partir de A, B, Γ es igual al sólido (construido) a partir de B, equilátero y equiangular con el (sólido) antedicho. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 37

Si cuatro rectas son proporcionales, los sólidos paralelepípedos semejantes y contruidos de manera semejante a partir de ellas serán también proporcionales; y si los sólidos paralelepípedos semejantes y contruidos de manera semejante a partir de ellas son proporcionales, también las propias rectas serán proporcionales.

Sean proporcionales las cuatro rectas AB , $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$, (es decir que) como AB es a $\Gamma\Delta$, así EZ a $H\Theta$, y contrúyanse a partir de AB , $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$ los sólidos paralelepípedos KA , $\Lambda\Gamma$, ME , NH semejantes y situados de manera semejante.



Digo que, como KA es a $\Lambda\Gamma$, así ME a NH .

Pues dado que el sólido paralelepípedo KA es semejante al (sólido paralelepípedo) $\Lambda\Gamma$, entonces KA guarda con $\Lambda\Gamma$ una razón triplicada de la que AB guarda con $\Gamma\Delta$ [XI 33]. Por lo mismo, ME guarda con NH una razón triplicada de la que EZ guarda con $H\Theta$ [id.]. Y como AB es a $\Gamma\Delta$, así EZ a $H\Theta$. Entonces, como AK es a $\Lambda\Gamma$, así ME a NH .

Pero ahora, como el sólido AK es al sólido $\Lambda\Gamma$, sea así el sólido ME al sólido NH .

Digo que, como la recta AB es a la (recta) $\Gamma\Delta$, así la (recta) EZ a la (recta) $H\Theta$.

Pues dado que KA guarda a su vez con $\Lambda\Gamma$ una razón triplicada de la que AB guarda con $\Gamma\Delta$ [XI 33], y ME guarda también con NH una razón triplicada de la que EZ guarda con $H\Theta$ [id.], y como KA es a $\Lambda\Gamma$, así ME a NH . entonces, como AB es a $\Gamma\Delta$, así EZ a $H\Theta$.

Por consiguiente, si cuatro rectas son proporcionales y lo que sigue del enunciado. Q. E. D. ⁶⁴.

PROPOSICIÓN 38

Si los lados de los planos opuestos de un cubo se dividen en dos partes iguales y se trazan planos a través de las secciones, la sección común de los planos y el diámetro del cubo se dividen mutuamente en dos partes iguales.

Divídanse en dos, pues, los lados de los planos opuestos ΓZ , $A\Theta$, del cubo AZ por los puntos K , Λ , M , N , Ξ , Π , O , P , y trácese los planos KN , ΞP a través de las secciones, y sea ΥZ la sección común y ΔH la diagonal del cubo.

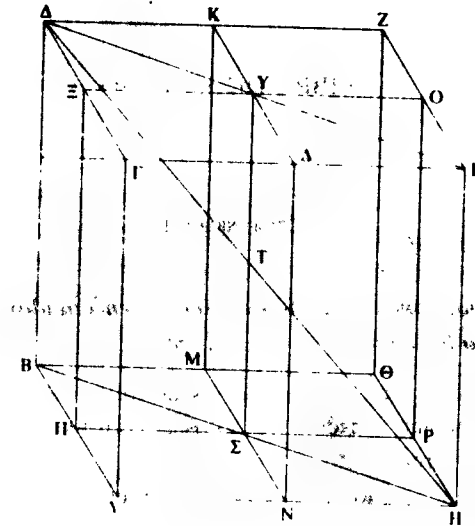
Digo que YT es igual a $T\Xi$ y ΔT a TH .

Pues trácese ΔY , $Y\Xi$, $B\Sigma$, ΣH . Y como $\Delta\Xi$ es paralela a OE , los ángulos alternos $\Delta\Xi Y$, YOE son iguales entre sí [I 29]. Y como $\Delta\Xi$ es igual a OE y ΞY a YO y comprenden ángulos igua-

⁶⁴ En esta proposición se asume que, si dos razones son iguales, la razón triplicada de una es igual a la razón triplicada de la otra, y a la inversa: si las razones triplicadas de otras dos razones son iguales, esas otras razones son iguales.

Por otra parte, Simson adopta la prueba alternativa que se encuentra en el manuscrito b. Esta demostración es aceptada también por Clavio que además aduce la prueba que Heiberg considera genuina atribuyéndola a Teón

les, entonces la base ΔY es igual a la base YE y el triángulo ΔEY es igual al triángulo OYE y los ángulos restantes son iguales a los ángulos restantes [I 4]. Luego el ángulo $\Xi Y \Delta$ es igual al ángulo OYE . Por eso ΔYE es una recta [I 14]. Por lo mismo $B \Xi H$ es



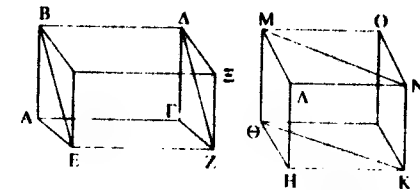
también una recta, y $B \Xi$ es igual a ΣH . Y como ΓA es igual y paralela a ΔB , mientras que ΓA también es igual y paralela a EH , entonces ΔB es igual y paralela a EH [XI 9]. Y las rectas ΔE , BH las unen; luego ΔE es paralela a BH [I, 33]. Por tanto, el ángulo $E \Delta T$ es igual al (ángulo) BHT , porque son alternos [I 29]; y el (ángulo) ΔTY es igual al (ángulo) $HT \Sigma$ [I 15]. Entonces ΔTY , $HT \Sigma$ son dos triángulos que tienen dos ángulos (del uno) iguales a dos ángulos (del otro) y un lado igual a un lado, el que subtiende a uno de los ángulos iguales, ΔY (que es igual) a $H \Sigma$, porque son mitades de ΔE , BH ; y tendrán también los lados restantes iguales a los lados restantes [I 26]. Por tanto, ΔT es igual a TH y YT a $T \Sigma$.

Por consiguiente, si se dividen en dos partes iguales los lados de los planos opuestos de un cubo, y se trazan planos a través de las secciones, la sección común de los planos y el diámetro del cubo se dividen mutuamente en dos partes iguales. Q. E. D.

PROPOSICION 39

Si dos prismas tienen la misma altura y uno tiene como base un paralelogramo y el otro un triángulo y el paralelogramo es el doble del triángulo, los prismas serán iguales.

Sean $AB \Gamma \Delta E Z$, $H \Theta K \Lambda M N$ dos prismas de la misma altura y tenga el primero como base el paralelogramo AZ , y el segundo el triángulo $H \Theta K$. Y sea el paralelogramo AZ el doble del triángulo $H \Theta K$.



Digo que el prisma $AB \Gamma \Delta E Z$ es igual al prisma $H \Theta K \Lambda M N$.

Complétense, pues, los sólidos $A \Xi$, $H O$. Como el paralelogramo AZ es el doble del triángulo $H \Theta K$, y el paralelogramo ΘK el doble del triángulo $H \Theta K$ [I 34], entonces el paralelogramo AZ es igual al paralelogramo ΘK . Pero los sólidos paralelepípedos que están sobre bases iguales y tienen la misma altura son iguales entre sí [XI 31]; luego el sólido $A \Xi$ es igual al sólido $H O$. Y el prisma $AB \Gamma \Delta E Z$ es la mitad del sólido $A \Xi$ y el prisma

$H\Theta KAMN$, la mitad del sólido HO [XI 28]; por tanto, el prisma $AB\Gamma\Delta EZ$ es igual al prisma $H\Theta KAMN$.

Por consiguiente, si dos prismas tienen la misma altura y uno tiene como base un paralelogramo y el otro un triángulo y el paralelogramo es el doble del triángulo, los prismas son iguales. Q. E. D.

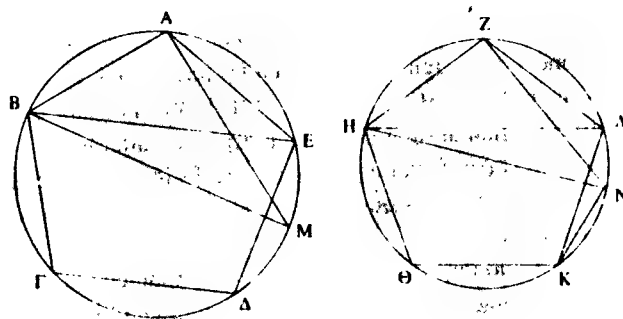
LIBRO DUODÉCIMO

PROPOSICIÓN I

Los polígonos semejantes inscritos en círculos son uno a otro como los cuadrados de los diámetros.

Sean $AB\Gamma$, $ZH\Theta$ los círculos y sean $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$ los polígonos semejantes inscritos en ellos, y sean BM , HN los diámetros de los círculos.

Digo que, como el cuadrado de BM es al cuadrado de HN , así el polígono $AB\Gamma\Delta E$ al polígono $ZH\Theta K\Lambda$.



Trácense, pues, BE , AM , HA , ZN . Y como el polígono $AB\Gamma\Delta E$ es semejante al polígono $ZH\Theta K\Lambda$, el ángulo BAE es igual al (án-

gulo) HZA , y como BA es a AE , así HZ a ZA [VI Def. 1]. Entonces BAE , HZA son dos triángulos que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro) —el ángulo BAE al ángulo HZA — y los lados que comprenden los ángulos iguales, proporcionales; luego los triángulos ABE , HZA son equiangulares [VI 6]. Por tanto, el ángulo AEB es igual al (ángulo) ZAH . Pero el (ángulo) AEB es igual al (ángulo) AMB : porque están sobre la misma circunferencia [III 27]⁶⁵; y el (ángulo) ZAH es igual al (ángulo) ZNH ; entonces el (ángulo) AMB es también igual al (ángulo) ZNH . Pero el (ángulo) recto BAM es igual al (ángulo) recto HZN [III 31]; luego el (ángulo) restante es igual al (ángulo) restante [I 32]. Por tanto, los triángulos ABM , ZHN son equiangulares. Luego, proporcionalmente, como BM es a HN , así BA a HZ [VI 4]. Pero el cuadrado de BM guarda con el cuadrado de HN una razón duplicada de la que BM guarda con HN , y el polígono $ABΓΔE$ guarda con el polígono $ZHΘKΛ$ una razón duplicada de la que BA guarda con HZ [VI 20]; entonces, como el cuadrado de BM es al cuadrado de HN , así el polígono $ABΓΔE$ es al polígono $ZHΘKΛ$.

Por consiguiente, los polígonos semejantes inscritos en círculos son uno a otro como los cuadrados de los diámetros. $Q \ E \ D$

PROPOSICION 2

Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros.

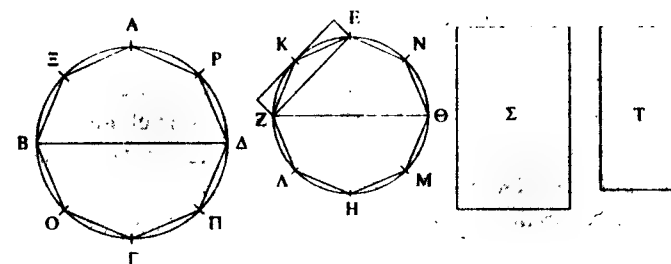
Sean $ABΓΔ$, $EZHΘ$ los círculos y BA , $ZΘ$ sus diámetros.

Digo que, como el círculo $ABΓΔ$ es al círculo $EZHΘ$, así el cuadrado de BA al cuadrado de $ZΘ$.

⁶⁵ Cf. EUCLEIDES, *Elementos* I-IV, nota 84, pag. 292.

Pues si el círculo $ABΓΔ$ no fuera al (círculo) $EZHΘ$ como el cuadrado de BA es al (cuadrado) de $ZΘ$, (entonces), como el (cuadrado) de BA es al (cuadrado) de $ZΘ$, así será el círculo $ABΓΔ$ a un área menor que el círculo $EZHΘ$ o a una mayor.

Séalo en primer lugar a un área menor Σ ; inscribese el cuadrado $EZHΘ$ en el círculo $EZHΘ$; entonces el cuadrado inscrito



es mayor que la mitad del círculo $EZHΘ$; porque si trazamos tangentes al círculo por los puntos E , Z , H , $Θ$, el cuadrado $EZHΘ$ es la mitad del cuadrado circunscrito en torno al círculo y el círculo es menor que el cuadrado circunscrito; de modo que el cuadrado inscrito $EZHΘ$ es mayor que la mitad del círculo $EZHΘ$. divídanse en dos partes iguales las circunferencias EZ , ZH , $HΘ$, $ΘE$ por los puntos K , $Λ$, M , N , y trácense EK , KZ , $ZΛ$, $ΛH$, $HΜ$, $MΘ$, $ΘN$, NE ; entonces cada uno de los triángulos EKZ , $ZΛH$, $HΜΘ$, $ΘNE$ es mayor que la mitad del segmento de círculo en que se halla: porque si trazamos tangentes al círculo por los puntos K , $Λ$, M , N , y completamos los paralelogramos sobre las (rectas) EZ , ZH , $HΘ$, $ΘE$, cada uno de los triángulos EKZ , $ZΛH$, $HΜΘ$, $ΘNE$ será la mitad del paralelogramo en que se halla; pero el segmento en que se halla es menor que el paralelogramo, de modo que cada uno de los triángulos EKZ , $ZΛH$, $HΜΘ$, $ΘNE$ es mayor que la mitad del segmento de círculo en que se halla. Entonces, si dividimos en dos las restantes circunferencias y trazamos rectas y procedemos así sucesivamente, dejare-

mos ciertos segmentos de círculo que serán menores que el exceso con que el círculo $EZH\Theta$ excede al área Σ : pues se ha demostrado en el primer teorema del libro X que, si se ponen dos magnitudes desiguales y se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, (se quita) una (magnitud) mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Quede, pues (como se ha dicho), y sean EK , KZ , $Z\Lambda$, ΛH , HM , $M\Theta$, ΘN , NE los segmentos del círculo $EZH\Theta$ menores que el exceso con que el círculo $EZH\Theta$ excede al área Σ . Entonces el polígono restante $EKZ\Lambda HM\Theta N$ es mayor que el área Σ . E inscribase en el círculo $AB\Gamma\Delta$ el polígono $A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P$ semejante al polígono $EKZ\Lambda HM\Theta N$; entonces, como el cuadrado de $B\Delta$ es al cuadrado de $Z\Theta$, así el polígono $A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P$ es al polígono $EKZ\Lambda HM\Theta N$ [XII 1]. Pero también, como el cuadrado de $B\Delta$ es al (cuadrado) de $Z\Theta$, así el círculo $AB\Gamma\Delta$ es al área Σ ; entonces, como el círculo $AB\Gamma\Delta$ es al área Σ , así el polígono $A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P$ es al polígono $EKZ\Lambda HM\Theta N$ [V 11]; luego, por alternancia, como el círculo $AB\Gamma\Delta$ es al polígono inscrito en él, así el área Σ al polígono $EKZ\Lambda HM\Theta N$ [V 16]. Pero el círculo $AB\Gamma\Delta$ es mayor que el polígono inscrito en él; entonces Σ también es mayor que el polígono $EKZ\Lambda HM\Theta N$. Pero también es menor; lo cual es imposible. Luego el círculo $AB\Gamma\Delta$ no es a un área menor que el círculo $EZH\Theta$ como el cuadrado de $B\Delta$ es al cuadrado de $Z\Theta$. De manera semejante demostraríamos que el círculo $EZH\Theta$ tampoco es a un área menor que el círculo $AB\Gamma\Delta$ como el cuadrado de $Z\Theta$ es al cuadrado de $B\Delta$.

Digo ahora que el cuadrado de $B\Delta$ tampoco es al cuadrado de $Z\Theta$ como el círculo $AB\Gamma\Delta$ a un área mayor que el círculo $EZH\Theta$.

Pues, si fuera posible, séalo a un (área) mayor Σ . Entonces, por inversión, como el cuadrado de $Z\Theta$ es al cuadrado de $B\Delta$, así el área Σ al círculo $AB\Gamma\Delta$. Ahora bien, como el área Σ es al círculo

$AB\Gamma\Delta$, así el círculo $EZH\Theta$ a un área menor que el círculo $AB\Gamma\Delta$; entonces, como el cuadrado de $Z\Theta$ es al cuadrado de $B\Delta$, así el círculo $EZH\Theta$ a un área menor que el círculo $AB\Gamma\Delta$ [V 11]; lo cual se ha demostrado que es imposible. Por tanto, el círculo $AB\Gamma\Delta$ no es a un área mayor que el círculo $EZH\Theta$ como el cuadrado de $B\Delta$ es al cuadrado de $Z\Theta$. Pero se ha demostrado que tampoco a un área menor; por tanto, como el cuadrado de $B\Delta$ es al cuadrado de $Z\Theta$, así el círculo $AB\Gamma\Delta$ al círculo $EZH\Theta$.

Por consiguiente, los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros. Q. E. D. ⁶⁶.

LEMA

Digo ahora que, si el área Σ es mayor que el círculo $EZH\Theta$, como el área Σ es al círculo $AB\Gamma\Delta$, así el círculo $EZH\Theta$ a un área menor que el círculo $AB\Gamma\Delta$.

Pues, como el área Σ es al círculo $AB\Gamma\Delta$, sea así el círculo $EZH\Theta$ al área T .

Digo que el área T es menor que el círculo $AB\Gamma\Delta$. Porque, efectivamente, como el área Σ es al círculo $AB\Gamma\Delta$, así el círculo $EZH\Theta$ al área T , luego, por alternancia, como el área Σ es al círculo $EZH\Theta$, así el círculo $AB\Gamma\Delta$ al área T [V 16]. Y el área Σ es mayor que el círculo $EZH\Theta$; por tanto, el círculo $AB\Gamma\Delta$ tam-

⁶⁶ La tradición ha atribuido la prueba de este teorema a Hipócrates. Sin embargo parece más verosímil atribuir su conocimiento a Eudoxo a juzgar por la referencia expresa de Arquímedes que remite a Eudoxo los resultados de XII, 7 Por. y XII 10. Lo esencial en esta proposición es probar que se puede utilizar el método de exhaustión con un círculo en el sentido de X 1, inscribiendo sucesivamente en él polígonos regulares cada uno de los cuales tiene el doble de lados que el precedente. Pueden verse más detalles sobre esta prueba concreta y sobre el mal llamado método «de exhaustión» en general, en L. VIGAN, *La trama de la demostración*, págs. 352-55. Recientemente ha vuelto sobre el uso euclideo de la exhaustión en el contexto del libro XII J. I. GARDINER, «L'organisation du livre XII des *Eléments* d'Euclide et ses anomalies», *Revue d'Histoire des Sciences*, XLVII/2 (1994), 189-208.

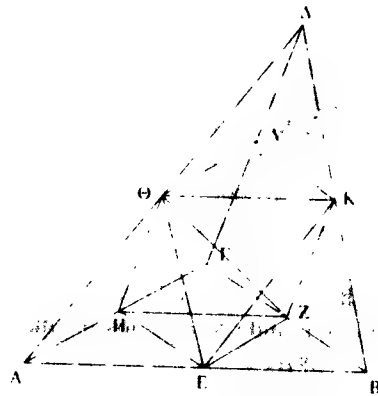
bién es mayor que el área T. De modo que, como el área Σ es al círculo $AB\Gamma\Delta$, así el círculo $EZH\Theta$ a un área menor que el círculo $AB\Gamma\Delta$. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 3

Toda pirámide que tiene como base un triángulo se divide en dos pirámides iguales, semejantes una a otra y a la (pirámide) entera, que tienen triángulos como bases, y se divide en dos prismas iguales; y los dos prismas son mayores que la mitad de la pirámide entera.

Sea una pirámide cuya base es el triángulo $AB\Gamma$ y su vértice el punto Δ .

Digo que la pirámide $AB\Gamma\Delta$ se divide en dos pirámides iguales una a otra que tienen triángulos como bases y semejan-



tes a la pirámide entera, y en dos prismas iguales; y que los dos prismas son mayores que la mitad de la pirámide entera.

Divídanse, pues, en dos partes iguales AB , $B\Gamma$, ΓA , ΔA , ΔB , $\Delta\Gamma$ por los puntos E , Z , H , Θ , K , Λ ; y trácense ΘE , $E H$, $H\Theta$, ΘK , $K\Lambda$, $\Lambda\Theta$, KZ , ZH . Puesto que AE es igual a EB y $A\Theta$ es igual a $\Delta\Theta$, entonces $E\Theta$ es paralela a ΔB [VI 2]. Por lo mismo, ΘK es también paralela a AB . Entonces $\Theta E B K$ es un paralelogramo; luego ΘK es igual a EB [I 34]. Pero EB es igual a EA ; por tanto, AE es también igual a ΘK . Pero $A\Theta$ es igual a $\Theta\Delta$; entonces las dos (rectas) EA , $A\Theta$ son iguales respectivamente a las dos (rectas) $K\Theta$, $\Theta\Delta$; y el ángulo $E A \Theta$ es igual al ángulo $K \Theta \Delta$; así pues, la base $E\Theta$ es igual a la base $K\Delta$ [I 4]. Luego el triángulo $A E \Theta$ es igual y semejante al triángulo $\Theta K \Delta$. Por lo mismo, el triángulo $A \Theta H$ es también igual y semejante al triángulo $\Theta \Lambda \Delta$. Y como las dos rectas que se tocan $E\Theta$, ΘH , son paralelas a las dos rectas que se tocan $K\Lambda$, $\Delta\Lambda$ y no están en el mismo plano, comprenderán ángulos iguales [XI 10]. Entonces, el ángulo $E\Theta H$ es igual al ángulo $K\Delta\Lambda$. Y como las dos rectas $E\Theta$, ΘH son iguales respectivamente a las dos (rectas) $K\Lambda$, $\Delta\Lambda$, y el ángulo $E\Theta H$ es igual al ángulo $K\Delta\Lambda$, entonces la base $E H$ es igual a la base $K\Lambda$ [I 4]; luego el triángulo $E \Theta H$ es igual y semejante al triángulo $K \Delta \Lambda$. Por lo mismo, el triángulo $A E H$ es también igual y semejante al triángulo $\Theta K \Lambda$. Por tanto, la pirámide cuya base es el triángulo $A E H$ y su vértice el punto Θ es también igual y semejante a la pirámide cuya base es el triángulo $\Theta K \Lambda$ y su vértice el punto Δ [XI Def. 10]. Y puesto que ΘK ha sido trazada paralela a uno de los lados del triángulo $\Delta A B$, el (lado) AB , los triángulos $\Delta A B$, $\Delta \Theta K$ son equiangulares [I 29] y tienen los lados proporcionales; luego el triángulo $\Delta A B$ es semejante al triángulo $\Delta \Theta K$ [VI Def. 1]. Por lo mismo, el triángulo $\Delta B \Gamma$ es semejante al triángulo $\Delta K \Lambda$ y el (triángulo) $\Delta A \Gamma$ al (triángulo) $\Delta \Lambda \Theta$. Ahora bien, como las dos rectas que se tocan, $B A$, $A \Gamma$, son paralelas a las dos rectas que se tocan, $K \Theta$, $\Theta \Lambda$, y no están en el mismo plano, comprenderán ángulos iguales [XI 10]. Entonces el ángulo $B A \Gamma$ es igual al ángulo $K \Theta \Lambda$. Y como $B A$ es a $A \Gamma$, así $K \Theta$ a

$\Theta\Lambda$; luego el triángulo $AB\Gamma$ es semejante al triángulo $\Theta\Lambda\Delta$. Por tanto, la pirámide cuya base es el triángulo $AB\Gamma$ y su vértice el punto Δ es semejante a la pirámide cuya base es el triángulo $\Theta\Lambda\Delta$ y su vértice el punto Δ . Pero se ha demostrado que la pirámide cuya base es el triángulo $\Theta\Lambda\Delta$ y su vértice el punto Δ es semejante a la pirámide cuya base es el triángulo AEH y su vértice el punto Θ . Por tanto, cada una de las pirámides $AEH\Theta$, $\Theta\Lambda\Delta$ es semejante a la pirámide entera $AB\Gamma\Delta$.

Ahora bien, como BZ es igual a $Z\Gamma$, el paralelogramo $EBZH$ es el doble del triángulo $HZ\Gamma$. Y puesto que, si hay dos prismas de la misma altura, y uno tiene como base un paralelogramo y el otro un triángulo, y el paralelogramo es el doble del triángulo, los prismas son iguales [XI 39], entonces el prisma comprendido por los dos triángulos BKZ , $E\Theta H$ y los tres paralelogramos $EBZH$, $EBK\Theta$, ΘKZH es igual al prisma comprendido por los dos triángulos $HZ\Gamma$, $\Theta\Lambda\Delta$ y los tres paralelogramos $KZ\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Gamma\Theta\Delta$, ΘKZH .

Y queda claro que cada uno de los prismas —a saber: aquel cuya base es el paralelogramo $EBZH$ y ΘK su recta opuesta y aquel cuya base es el triángulo $HZ\Gamma$ y $\Theta\Lambda\Delta$ su triángulo opuesto— es mayor que cada una de las pirámides cuyas bases son los triángulos AEH , $\Theta\Lambda\Delta$ y sus vértices los puntos Θ , Δ ; porque, si trazamos las rectas EZ , $E\Lambda$, el prisma cuya base es el paralelogramo $EBZH$ y ΘK su recta opuesta es mayor que la pirámide cuya base es el triángulo EBZ y su vértice el punto K . Pero la pirámide cuya base es el triángulo EBZ y su vértice el punto K es igual a la pirámide cuya base es el triángulo AEH y su vértice el punto Θ : porque están comprendidas por planos iguales y semejantes. De modo que el prisma cuya base es el paralelogramo $EBZH$ y ΘK su recta opuesta es mayor que la pirámide cuya base es el triángulo AEH y su vértice el punto Θ . Pero el prisma cuya base es el paralelogramo $EBZH$ y ΘK su recta opuesta es igual al prisma cuya base es el triángulo $HZ\Gamma$ y $\Theta\Lambda\Delta$

su triángulo opuesto; y la pirámide cuya base es el triángulo AEH y su vértice el punto Θ es igual a la pirámide cuya base es el triángulo $\Theta\Lambda\Delta$ y su vértice el punto Δ . Por tanto, los dos prismas antedichos son mayores que las dos pirámides antedichas cuyas bases son los triángulos AEH , $\Theta\Lambda\Delta$ y sus vértices los puntos Θ , Δ .

Por consiguiente, la pirámide entera cuya base es el triángulo $AB\Gamma$ y su vértice el punto Δ se ha dividido en dos pirámides iguales entre sí y en dos prismas iguales. Y los dos prismas son mayores que la mitad de la pirámide entera. Q. E. D.

PROPOSICION 4

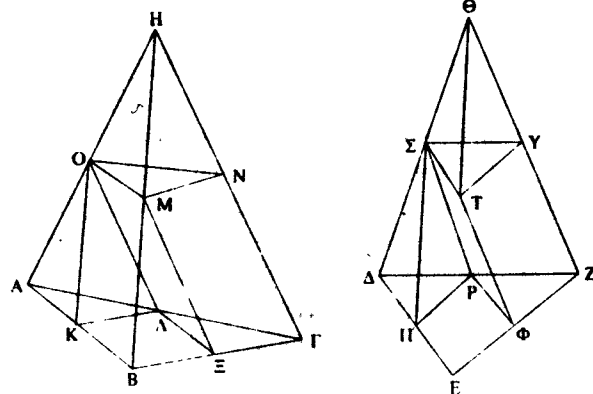
Si hay dos pirámides de la misma altura que tienen triángulos como bases, y cada una de ellas se divide en dos pirámides iguales entre sí y semejantes a la pirámide entera y en dos prismas iguales; (entonces) como la base de una pirámide es a la base de la otra pirámide, así serán todos los prismas de una pirámide a todos los prismas iguales en número de la otra pirámide.

Sean dos pirámides de la misma altura que tienen como bases los triángulos $AB\Gamma$, ΔEZ , y como vértices los puntos H , Θ ; y divídase cada una de ellas en dos pirámides iguales entre sí y semejantes a la (pirámide) entera, y en dos prismas iguales [XII 3].

Digo que, como la base $AB\Gamma$ es a la base ΔEZ , así (son) todos los prismas de la pirámide $AB\Gamma H$ a los prismas iguales en número de la pirámide $\Delta EZ\Theta$.

Pues como $B\Xi$ es igual a $\Xi\Gamma$ y $\Lambda\Lambda$ a $\Lambda\Gamma$, entonces $\Lambda\Xi$ es paralela a AB y el triángulo $AB\Gamma$ es semejante al triángulo $\Lambda\Xi\Gamma$; por lo mismo, el triángulo ΔEZ es también semejante al triángulo

$P\Phi Z$. Y como $B\Gamma$ es el doble de ΓE , mientras que EZ es (el doble) de $Z\Phi$, entonces, como $B\Gamma$ es a ΓE , así EZ a $Z\Phi$. Ahora bien,



se han construido sobre $B\Gamma$, ΓE las figuras rectilíneas semejantes y situadas de manera semejante $AB\Gamma$, $\Lambda E\Gamma$, y sobre EZ , $Z\Phi$ las (figuras rectilíneas) semejantes y situadas de manera semejante ΔEZ , $P\Phi Z$; luego, como el triángulo $AB\Gamma$ es al triángulo $\Lambda E\Gamma$, así el triángulo ΔEZ al triángulo $P\Phi Z$ [VI 22]. Entonces, por alternancia, como el triángulo $AB\Gamma$ es al (triángulo) ΔEZ , así el (triángulo) $\Lambda E\Gamma$ es al triángulo $P\Phi Z$ [V 16]. Ahora bien, como el triángulo $\Lambda E\Gamma$ es al triángulo $P\Phi Z$, así el prisma cuya base es el triángulo $\Lambda E\Gamma$ y su (triángulo) opuesto OMN es al prisma cuya base es el triángulo $P\Phi Z$ y su (triángulo) opuesto ΣTY [Lema subsiguiente a esta proposición]; entonces, como el triángulo $AB\Gamma$ es al triángulo ΔEZ , así el prisma cuya base es el triángulo $\Lambda E\Gamma$ y su (triángulo) opuesto OMN al prisma cuya base es el triángulo $P\Phi Z$ y su (triángulo) opuesto ΣTY . Pero, como los antedichos prismas son entre sí, así el prisma cuya base es el paralelogramo $KB\Lambda$ y su recta opuesta OM , al prisma cuya base es el paralelogramo $\Pi E\Phi$ y su recta opuesta ΣT [XI 39; XII 3]. Entonces los dos prismas, aquel cuya base es el

paralelogramo $KB\Lambda$ y su recta opuesta OM y aquel cuya base es el (triángulo) $\Lambda E\Gamma$ y su triángulo opuesto OMN guardan la misma razón que los dos prismas, aquel cuya base es el (paralelogramo) $\Pi E\Phi$ y su recta opuesta ΣT y aquel cuya base es el (triángulo) $P\Phi Z$ y cuyo triángulo opuesto es ΣTY [V 12]. Luego, como la base $AB\Gamma$ es a la base ΔEZ , así los dos prismas a los (otros) dos prismas dichos.

Y de manera semejante, si las pirámides $OMNH$, $\Sigma TY\Theta$ se dividen en dos prismas y dos pirámides, como la base OMN es a la base ΣTY , así serán los dos prismas de la pirámide $OMNH$ a los dos prismas de la pirámide $\Sigma TY\Theta$. Ahora bien, como la base OMN es a la base ΣTY , así la base $AB\Gamma$ es a la base ΔEZ : porque cada uno de los triángulos OMN , ΣTY son iguales respectivamente a los triángulos $\Lambda E\Gamma$, $P\Phi Z$. Por tanto, como la base $AB\Gamma$ es a la base ΔEZ , así (son) los cuatro prismas a los cuatro prismas. De manera semejante, si dividimos las pirámides restantes en dos pirámides y dos prismas, entonces, como la base $AB\Gamma$ es a la base ΔEZ , así serán todos los prismas de la pirámide $AB\Gamma H$ a todos los prismas iguales en número de la pirámide $\Delta EZ\Theta$. Q. E. D.

LEMA

Hay que demostrar como sigue que, como el triángulo $\Lambda E\Gamma$ es al triángulo $P\Phi Z$, así el prisma cuya base es el triángulo $\Lambda E\Gamma$ y su triángulo opuesto OMN al prisma cuya base es el (triángulo) $P\Phi Z$ y su triángulo opuesto ΣTY .

Pues considérense en la misma figura las perpendiculares a los planos $AB\Gamma$, ΔEZ desde los (puntos) H , Θ que son iguales evidentemente porque se ha supuesto que las pirámides son de la misma altura. Y como las dos rectas $H\Gamma$ y la perpendicular desde H son cortadas por los planos paralelos $AB\Gamma$, OMN , serán cortadas en las mismas razones [XI 17]. Ahora bien, $H\Gamma$ se ha dividido también en dos partes iguales por el plano OMN en el

(punto) N; entonces la perpendicular desde H al plano ABΓ será dividida también en dos partes iguales por el plano OMN. Por lo mismo, la perpendicular desde Θ al plano ΔEZ se ha dividido en dos partes iguales por el plano ΣΤΥ. Y las perpendiculares a los planos ABΓ, ΔEZ desde los puntos H, Θ son iguales; luego las perpendiculares a los (planos) ABΓ, ΔEZ desde los triángulos OMN, ΣΤΥ son también iguales. Por tanto, los prismas cuyas bases son los triángulos ΔΕΓ, ΡΦΖ y sus triángulos opuestos OMN, ΣΤΥ son de la misma altura. De modo que los sólidos paralelepípedos descritos sobre dichos prismas son de la misma altura y son entre sí como sus bases [XI 32]; por tanto, sus mitades, dichos prismas, son entre sí como la base ΔΕΓ es a la base ΡΦΖ. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 5

Las pirámides que tienen la misma altura y tienen triángulos como bases son entre sí como sus bases.

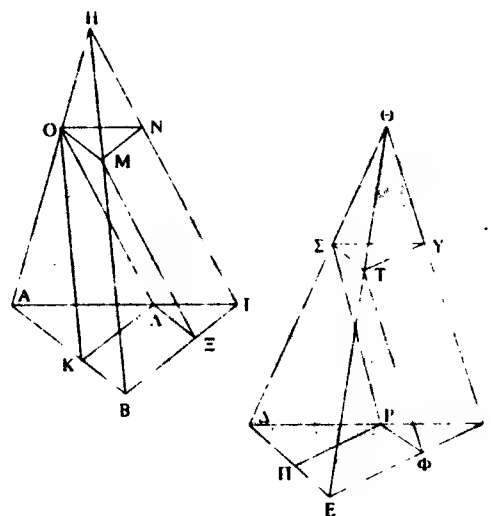
Sean de la misma altura las pirámides cuyas bases son los triángulos ABΓ, ΔEZ y sus vértices los puntos H, Θ.

Digo que, como la base ABΓ es a la base ΔEZ, así la pirámide ABΓH a la pirámide ΔEZΘ.

Pues, si la base ABΓ no es a la base ΔEZ como la pirámide ABΓH es a la pirámide ΔEZΘ, (entonces), como la base ABΓ es a la base ΔEZ, así será la pirámide ABΓH o bien a un (sólido) menor que la pirámide ΔEZΘ o bien a uno mayor.

Séalo, en primer lugar, a uno menor, X, y divídase la pirámide ΔEZΘ en dos pirámides iguales entre sí y semejantes a la pirámide entera y en dos prismas iguales; entonces los dos prismas son mayores que la mitad de la pirámide entera [XII 3]. Y divídanse, a su vez, de manera semejante las pirámides

resultantes de la división y así sucesivamente hasta que, a partir de la pirámide ΔEZΘ, queden ciertas pirámides que sean me-

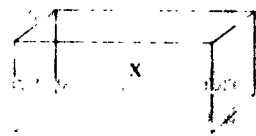


nores que el exceso con que la pirámide ΔEZΘ excede al sólido X [X 1]. Queden (tales pirámides) y sean las pirámides ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ por mor de la argumentación; entonces los prismas restantes de la pirámide ΔEZΘ son mayores que el sólido X. Divídase también la pirámide ABΓH de manera semejante y el mismo número de veces que la pirámide ΔEZΘ. Entonces, como la base ABΓ es a la base ΔEZ, así los prismas de la pirámide ABΓH a los prismas de la pirámide ΔEZΘ [XII 4]. Pero también, como la base ABΓ es a la base ΔEZ, así la pirámide ABΓH al sólido X; luego como la pirámide ABΓH es al sólido X, así los prismas de la pirámide ABΓH a los prismas de la pirámide ΔEZΘ [V 11]; así pues, por alternancia, como la pirámide ABΓH es a sus prismas, así el sólido X es a los prismas de la pirámide ΔEZΘ [V 16]. Pero la pirámide ABΓH es mayor que sus prismas; entonces el

sólido X es mayor que los prismas de la pirámide $\Delta EZ\Theta$. Pero también es menor; lo cual es imposible. Por tanto, la pirámide $AB\Gamma H$ no es a un (sólido) menor que la pirámide $\Delta EZ\Theta$ como la base $AB\Gamma$ es a la base ΔEZ . De manera semejante se demostraría que la pirámide $\Delta EZ\Theta$ tampoco es a un sólido menor que la pirámide $AB\Gamma H$ como la base ΔEZ es a la base $AB\Gamma$.

Digo además que la pirámide $AB\Gamma H$ tampoco es a un sólido mayor que la pirámide $\Delta EZ\Theta$ como la base $AB\Gamma$ es a la base ΔEZ .

Pues, si fuera posible, séalo al (sólido) mayor X ; entonces, por inversión, como la base ΔEZ es a la base $AB\Gamma$, así el sólido X



a la pirámide $AB\Gamma H$. Pero como el sólido X es a la pirámide $AB\Gamma H$, así la pirámide $\Delta EZ\Theta$ a un (sólido) menor que la pirámide $AB\Gamma H$, como se ha demostrado anteriormente [XII 2 lema]. En-

tonces, como la base ΔEZ es a la base $AB\Gamma$, así la pirámide $\Delta EZ\Theta$ a un (sólido) menor que la pirámide $AB\Gamma H$ [V 11]; lo cual se ha demostrado que es absurdo; por tanto, la pirámide $AB\Gamma H$ no es a un sólido mayor que la pirámide $\Delta EZ\Theta$ como la base $AB\Gamma$ es a la base ΔEZ . Pero se ha demostrado que tampoco es a uno menor. Por consiguiente, como la base $AB\Gamma$ es a la base ΔEZ , así la pirámide $AB\Gamma H$ a la pirámide $\Delta EZ\Theta$. Q. E. D.

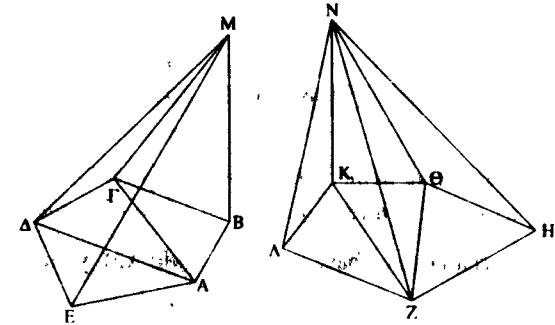
PROPOSICIÓN 6

Las pirámides que tienen la misma altura y tienen polígonos como bases son entre sí como sus bases.

Sean de la misma altura las pirámide cuyas bases son los polígonos $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$ y sus vértices los puntos M , N .

Digo que como la base $AB\Gamma\Delta E$ es a la base $ZH\Theta K\Lambda$, así la pirámide $AB\Gamma\Delta E M$ a la pirámide $ZH\Theta K\Lambda N$.

Trácese, pues, las (rectas) $A\Gamma$, $A\Delta$, $Z\Theta$, ZK . Como en efecto $AB\Gamma M$, $A\Gamma\Delta M$ son dos pirámides que tienen triángulos como ba-

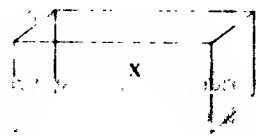


ses e igual altura, son entre sí como sus bases [XII 5]; entonces, como la base $AB\Gamma$ es a la base $A\Gamma\Delta$, así la pirámide $AB\Gamma M$ es a la pirámide $A\Gamma\Delta M$. Y, por composición, como la base $AB\Gamma\Delta$ es a la base $A\Gamma\Delta$, así la pirámide $AB\Gamma\Delta M$ es a la pirámide $A\Gamma\Delta M$ [V 18]. Pero también, como la base $A\Gamma\Delta$ es a la base $A\Delta E$, así la pirámide $A\Gamma\Delta M$ a la pirámide $A\Delta E M$ [XII 5]. Luego, por igualdad, como la base $AB\Gamma\Delta$ es a la base $A\Delta E$, así la pirámide $AB\Gamma\Delta M$ a la pirámide $A\Delta E M$ [V 22]. Y de nuevo, por composición, como la base $AB\Gamma\Delta E$ es a la base $A\Delta E$, así la pirámide $AB\Gamma\Delta E M$ a la pirámide $A\Delta E M$ [V 18]. De manera semejante se demostraría que también, como la base $ZH\Theta K\Lambda$ es a la base $ZH\Theta$, así la pirámide $ZH\Theta K\Lambda N$ a la pirámide $ZH\Theta N$. Y como $A\Delta E M$, $ZH\Theta N$ son dos pirámides que tienen triángulos como bases e igual altura, entonces, como la base $A\Delta E$ es a la base $ZH\Theta$, así la pirámide $A\Delta E M$ a la pirámide $ZH\Theta N$ [XII 5]. Ahora bien, como la base $A\Delta E$ es a la base $AB\Gamma\Delta E$, así era la pirámide $A\Delta E M$ a la pirámide $AB\Gamma\Delta E M$. Luego, por igualdad, como la base $AB\Gamma\Delta E$ es a la base $ZH\Theta$, así la pirámide $AB\Gamma\Delta E M$ a la pirámide $ZH\Theta N$ [V 22]. Pero también, como la base $ZH\Theta$ es a la base $ZH\Theta K\Lambda$, así era la pirámide $ZH\Theta N$ a la pirámide $ZH\Theta K\Lambda N$. Por

sólido X es mayor que los prismas de la pirámide $\Delta EZ\Theta$. Pero también es menor; lo cual es imposible. Por tanto, la pirámide $AB\Gamma H$ no es a un (sólido) menor que la pirámide $\Delta EZ\Theta$ como la base $AB\Gamma$ es a la base ΔEZ . De manera semejante se demostraría que la pirámide $\Delta EZ\Theta$ tampoco es a un sólido menor que la pirámide $AB\Gamma H$ como la base ΔEZ es a la base $AB\Gamma$.

Digo además que la pirámide $AB\Gamma H$ tampoco es a un sólido mayor que la pirámide $\Delta EZ\Theta$ como la base $AB\Gamma$ es a la base ΔEZ .

Pues, si fuera posible, séalo al (sólido) mayor X ; entonces, por inversión, como la base ΔEZ es a la base $AB\Gamma$, así el sólido X



a la pirámide $AB\Gamma H$. Pero como el sólido X es a la pirámide $AB\Gamma H$, así la pirámide $\Delta EZ\Theta$ a un (sólido) menor que la pirámide $AB\Gamma H$, como se ha demostrado anteriormente [XII 2 lema]. En-

tonces, como la base ΔEZ es a la base $AB\Gamma$, así la pirámide $\Delta EZ\Theta$ a un (sólido) menor que la pirámide $AB\Gamma H$ [V 11]; lo cual se ha demostrado que es absurdo; por tanto, la pirámide $AB\Gamma H$ no es a un sólido mayor que la pirámide $\Delta EZ\Theta$ como la base $AB\Gamma$ es a la base ΔEZ . Pero se ha demostrado que tampoco es a uno menor. Por consiguiente, como la base $AB\Gamma$ es a la base ΔEZ , así la pirámide $AB\Gamma H$ a la pirámide $\Delta EZ\Theta$. Q. E. D.

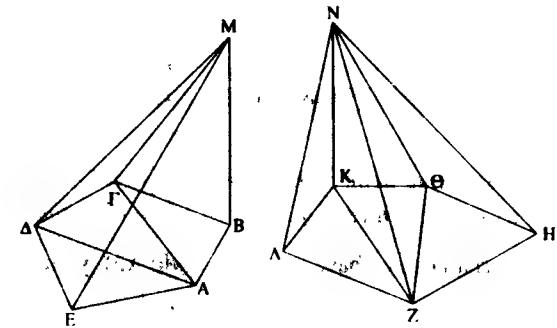
PROPOSICION 6

Las pirámides que tienen la misma altura y tienen polígonos como bases son entre sí como sus bases.

Sean de la misma altura las pirámide cuyas bases son los polígonos $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$ y sus vértices los puntos M , N .

Digo que como la base $AB\Gamma\Delta E$ es a la base $ZH\Theta K\Lambda$, así la pirámide $AB\Gamma\Delta E M$ a la pirámide $ZH\Theta K\Lambda N$.

Trácese, pues, las (rectas) $A\Gamma$, $A\Delta$, $Z\Theta$, ZK . Como en efecto $AB\Gamma M$, $A\Gamma\Delta M$ son dos pirámides que tienen triángulos como ba-



ses e igual altura, son entre sí como sus bases [XII 5]; entonces, como la base $AB\Gamma$ es a la base $A\Gamma\Delta$, así la pirámide $AB\Gamma M$ es a la pirámide $A\Gamma\Delta M$. Y, por composición, como la base $AB\Gamma\Delta$ es a la base $A\Gamma\Delta$, así la pirámide $AB\Gamma\Delta M$ es a la pirámide $A\Gamma\Delta M$ [V 18]. Pero también, como la base $A\Gamma\Delta$ es a la base $A\Delta E$, así la pirámide $A\Gamma\Delta M$ a la pirámide $A\Delta E M$ [XII 5]. Luego, por igualdad, como la base $AB\Gamma\Delta$ es a la base $A\Delta E$, así la pirámide $AB\Gamma\Delta M$ a la pirámide $A\Delta E M$ [V 22]. Y de nuevo, por composición, como la base $AB\Gamma\Delta E$ es a la base $A\Delta E$, así la pirámide $AB\Gamma\Delta E M$ a la pirámide $A\Delta E M$ [V 18]. De manera semejante se demostraría que también, como la base $ZH\Theta K\Lambda$ es a la base $ZH\Theta$, así la pirámide $ZH\Theta K\Lambda N$ a la pirámide $ZH\Theta N$. Y como $A\Delta E M$, $ZH\Theta N$ son dos pirámides que tienen triángulos como bases e igual altura, entonces, como la base $A\Delta E$ es a la base $ZH\Theta$, así la pirámide $A\Delta E M$ a la pirámide $ZH\Theta N$ [XII 5]. Ahora bien, como la base $A\Delta E$ es a la base $AB\Gamma\Delta E$, así era la pirámide $A\Delta E M$ a la pirámide $AB\Gamma\Delta E M$. Luego, por igualdad, como la base $AB\Gamma\Delta E$ es a la base $ZH\Theta$, así la pirámide $AB\Gamma\Delta E M$ a la pirámide $ZH\Theta N$ [V 22]. Pero también, como la base $ZH\Theta$ es a la base $ZH\Theta K\Lambda$, así era la pirámide $ZH\Theta N$ a la pirámide $ZH\Theta K\Lambda N$. Por

consiguiente, por igualdad, como la base $AB\Gamma\Delta E$ es a la base $ZH\Theta K\Lambda$, así la pirámide $AB\Gamma\Delta EM$ a la pirámide $ZH\Theta K\Lambda N$ [V 22]. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 7

Todo prisma que tiene como base un triángulo se divide en tres prismas iguales entre sí que tienen triángulos como bases.

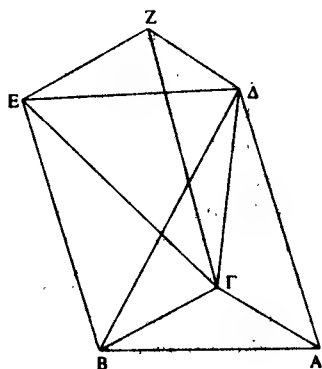
Sea un prisma cuya base es el triángulo $AB\Gamma$ y su (triángulo) opuesto ΔEZ .

Digo que el prisma $AB\Gamma\Delta EZ$ se divide en tres pirámides iguales entre sí que tienen triángulos como bases.

Trácense, pues, las (rectas) BA , $E\Gamma$, $\Gamma\Delta$. Como $ABE\Delta$ es un paralelogramo y su diámetro ⁶⁷ es BA , entonces el triángulo ABA es igual al triángulo EBA [I 34]. Luego la pirámide cuya base es el triángulo ABA y su vértice Γ es igual a la pirámide cuya base es el triángulo ΔEB y su vértice el punto Γ [XII 5]. Pero la pirámide cuya base es el triángulo ΔEB y su vértice el punto Γ es la misma que la pirámide cuya base es el triángulo $EB\Gamma$ y su vértice el punto Γ : porque es-

tán comprendidas por los mismos planos. Entonces, la pirámide cuya base es el triángulo ABA y su vértice el punto Γ es

⁶⁷ Respeto la terminología de Euclides que utiliza la palabra *diámetros* para la diagonal (Cf. *Elementos I-IV*, nota 9, pág. 194).



igual a la pirámide cuya base es el triángulo $E\Gamma\Delta$ y su vértice el punto Δ . Puesto que, a su vez, $Z\Gamma BE$ es un paralelogramo y su diámetro es ΓE , el triángulo ΓEZ es igual al triángulo ΓBE [I 34]. Entonces la pirámide cuya base es el triángulo $B\Gamma E$ y su vértice el punto Δ es igual a la pirámide cuya base es el triángulo $E\Gamma Z$ y su vértice el punto Δ [XII 5]. Pero se ha demostrado que la pirámide cuya base es el triángulo $B\Gamma E$ y su vértice el punto Δ es igual a la pirámide cuya base es el triángulo ABA y su vértice el punto Γ ; entonces la pirámide cuya base es el triángulo ΓEZ y su vértice el punto Δ es igual a la pirámide cuya base es el triángulo ABA y su vértice el punto Γ ; por tanto, el prisma $AB\Gamma\Delta EZ$ se ha dividido en tres pirámides iguales entre sí que tienen triángulos como bases.

Y como la pirámide cuya base es el triángulo ABA y su vértice el punto Γ es la misma que la pirámide cuya base es el triángulo ΓAB y su vértice el punto Δ : porque están comprendidas por los mismos planos, mientras que la pirámide cuya base es el triángulo ABA y su vértice el punto Γ se ha demostrado que es el tercio del prisma cuya base es el triángulo $AB\Gamma$ y su triángulo opuesto ΔEZ , entonces la pirámide cuya base es el triángulo $AB\Gamma$ y su vértice el punto Δ es el tercio del prisma que tiene la misma base, a saber: el triángulo $AB\Gamma$, y como triángulo opuesto ΔEZ .

Porisma:

A partir de esto que da claro que toda pirámide es la tercera parte del prisma que tiene la misma base que ella e igual altura. Q. E. D. ⁶⁸.

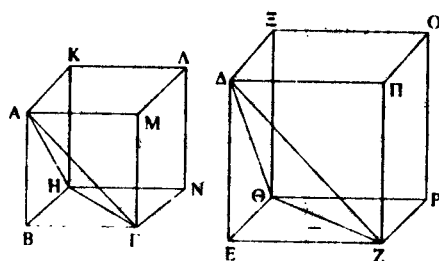
⁶⁸ Según Vera se trata de una ingeniosa demostración con la que Euclides se topó por una afortunada coincidencia. Vera aduce a este respecto las palabras de Beppo Levi: «profundizando en el método de exhausción, Euclides habría podido llegar al resultado directamente por el razonamiento anterior. Este paso lo hizo Arquímedes en el tratado de la cuadratura de la parábola, problema que, como sabemos, se puede considerar como una transposición del problema del volumen de la pirámide.» (Cf. VERA, *op. cit.*, pág. 951)

PROPOSICIÓN 8

Las pirámides semejantes que tienen como bases triángulos guardan una razón triplicada de la de sus lados correspondientes.

Sean las pirámides semejantes y situadas de manera semejante cuyas bases son los triángulos $AB\Gamma$, ΔEZ y sus vértices los puntos H , Θ .

Digo que la pirámide $AB\Gamma H$ guarda con la pirámide $\Delta EZ\Theta$ una razón triplicada de la que $B\Gamma$ (guarda) con EZ .



Complétense, pues, los sólidos paralelepípedos $BHMA$, $E\Theta\Pi O$.

Ahora bien, como la pirámide $AB\Gamma H$ es semejante a la pirámide $\Delta EZ\Theta$, entonces, el ángulo $AB\Gamma$ es igual al ángulo ΔEZ , y el ángulo HBI es igual al ángulo ΘEZ , y el ABH al $\Delta E\Theta$, y como AB es a ΔE , así BI a EZ y BH a $E\Theta$. Y dado que, como AB es a ΔE , así $B\Gamma$ a EZ y que los lados que comprenden ángulos iguales son proporcionales, entonces, el paralelogramo BM es semejante al paralelogramo $E\Pi$. Por lo mismo, en efecto, el (paralelogramo) BN es semejante al (paralelogramo) $E\Pi$ y el (paralelogramo) BK al (paralelogramo) $E\Xi$; luego los tres (paralelogramos) MB , BK , BN son semejantes a los tres (paralelo-

gramos) $E\Pi$, $E\Xi$, $E\Pi$. Pero los tres (paralelogramos) MB , BK , BN son iguales y semejantes a sus tres opuestos, y los tres (paralelogramos) $E\Pi$, $E\Xi$, $E\Pi$ son también iguales y semejantes a sus tres opuestos [XI 24]. Entonces los sólidos $BHMA$, $E\Theta\Pi O$ están comprendidos por planos semejantes e iguales en número. Luego el sólido $BHMA$ es semejante al sólido $E\Theta\Pi O$. Pero los sólidos paralelepípedos semejantes guardan una razón triplicada de la de sus lados correspondientes [XI 33]. Entonces el sólido $BHMA$ guarda con el sólido $E\Theta\Pi O$ una razón triplicada de la que el lado correspondiente $B\Gamma$ guarda con el lado correspondiente EZ . Pero como el sólido $BHMA$ es al sólido $E\Theta\Pi O$, así la pirámide $AB\Gamma H$ a la pirámide $\Delta EZ\Theta$: pues la pirámide es la sexta parte del sólido porque el prisma, que es la mitad del sólido paralelepípedo [XI 28], es el triple de la pirámide [XII 7].

Por consiguiente, la pirámide $AB\Gamma H$ guarda con la pirámide $\Delta EZ\Theta$ una razón triplicada de la que $B\Gamma$ (guarda) con EZ . Q. E. D.

Porisma:

A partir de esto queda claro que las pirámides que tienen como bases polígonos guardan entre sí una razón triplicada de la de sus lados correspondientes. Pues, si se dividen en las pirámides contenidas en ellas que tengan como bases triángulos —por el hecho de que los polígonos semejantes de sus bases se dividen en triángulos semejantes e iguales en número y homólogos a los (polígonos) enteros [VI 20]— entonces, como una de las pirámides con base triangular de la primera es a una de las pirámides con base triangular de la segunda, así serán todas las pirámides con base triangular de la primera pirámide a las pirámides con base triangular de la segunda pirámide [V 12], es decir, la propia pirámide que tiene como base un polígono a la (otra) pirámide que tiene como base un polígono. Pero la pirámide que tiene como base un triángulo guarda con

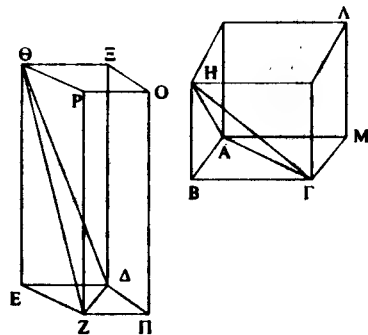
la (pirámide) que tiene como base un triángulo una razón triplicada de la de sus lados correspondientes.

Por consiguiente, la (pirámide) que tiene como base un polígono guarda con la que tiene una base semejante una razón triplicada de la que el lado guarda con el lado⁶⁹.

PROPOSICIÓN 9

Las bases de las pirámides iguales que tienen como bases triángulos están inversamente relacionadas con sus alturas; y aquellas pirámides que tienen como bases triángulos, cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas, son iguales.

Sean, pues, las pirámides iguales que tienen como bases los triángulos $AB\Gamma$, ΔEZ y como vértices los puntos H , Θ .



Digo que las bases de las pirámides $AB\Gamma H$, $\Delta EZ\Theta$ están inversamente relacionadas con sus alturas, y como la base $AB\Gamma$

⁶⁹ Al parecer no faltan motivos para dudar de la autenticidad del porisma P sólo lo tiene en el margen, aunque es de la primera mano.

es a la base ΔEZ , así la altura de la pirámide $\Delta EZ\Theta$ a la altura de la pirámide $AB\Gamma H$.

Pues complétense los sólidos paralelepípedos $BHMA$, $E\Theta\Pi O$. Y como la pirámide $AB\Gamma H$ es igual a la pirámide $\Delta EZ\Theta$, y el sólido $BHMA$ es el séxtuple de la pirámide $AB\Gamma H$, mientras que el sólido $E\Theta\Pi O$ es el séxtuple de la pirámide $\Delta EZ\Theta$, entonces el sólido $BHMA$ es igual al sólido $E\Theta\Pi O$. Pero las bases de los sólidos paralelepípedos iguales están inversamente relacionadas con sus alturas [XI 34]; entonces, como la base BM es a la base $E\Pi$, así la altura del sólido $E\Theta\Pi O$ es a la altura del sólido $BHMA$. Ahora bien, como la base BM es a la base $E\Pi$, así el triángulo $AB\Gamma$ al triángulo ΔEZ [I 34]. Luego también, como el triángulo $AB\Gamma$ es al triángulo ΔEZ , así la altura del sólido $E\Theta\Pi O$ a la altura del sólido $BHMA$ [V 11]. Pero la altura del sólido $E\Theta\Pi O$ es la misma que la altura de la pirámide $\Delta EZ\Theta$, y la altura del sólido $BHMA$ es la misma que la altura de la pirámide $AB\Gamma H$; entonces, como la base $AB\Gamma$ es a la base ΔEZ , así la altura de la pirámide $\Delta EZ\Theta$ es a la altura de la pirámide $AB\Gamma H$. Por tanto, las bases de las pirámides $AB\Gamma H$, $\Delta EZ\Theta$ están inversamente relacionadas con sus alturas.

Pero ahora, estén las bases de las pirámides $AB\Gamma H$, $\Delta EZ\Theta$ inversamente relacionadas con sus alturas, y, como la base $AB\Gamma$ es a la base ΔEZ , así la altura de la pirámide $\Delta EZ\Theta$ a la altura de la pirámide $AB\Gamma H$.

Digo que la pirámide $AB\Gamma H$ es igual a la pirámide $\Delta EZ\Theta$.

Pues, siguiendo la misma construcción, dado que, como la base $AB\Gamma$ es a la base ΔEZ , así la altura de la pirámide $\Delta EZ\Theta$ a la altura de la pirámide $AB\Gamma H$, mientras que, como la base $AB\Gamma$ es a la base ΔEZ , así el paralelogramo BM al paralelogramo $E\Pi$; entonces también, como el paralelogramo BM es al paralelogramo $E\Pi$, así la altura de la pirámide $\Delta EZ\Theta$ a la altura de la pirámide $AB\Gamma H$ [V 11]. Ahora bien, la altura de la pirámide $\Delta EZ\Theta$ es la misma que la altura del paralelepípedo $E\Theta\Pi O$, y la altura

de la pirámide $AB\Gamma H$ es la misma que la altura del paralelepípedo $BHMA$. Entonces, como la base BM es a la base EP , así la altura del paralelepípedo $E\Theta\Pi O$ a la altura del paralelepípedo $BHMA$. Pero aquellos sólidos paralelepípedos cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas son iguales [XI 34]; luego el sólido paralelepípedo $BHMA$ es igual al sólido paralelepípedo $E\Theta\Pi O$. Ahora bien, la pirámide $AB\Gamma H$ es la sexta parte del (paralelepípedo) $BHMA$, y la pirámide $\Delta EZ\Theta$ es la sexta parte del paralelepípedo $E\Theta\Pi O$. Por tanto la pirámide $AB\Gamma H$ es igual a la pirámide $\Delta EZ\Theta$.

Por consiguiente, las bases de las pirámides que tienen como bases triángulos están inversamente relacionadas con sus alturas, y aquellas pirámides que tienen como bases triángulos, cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas, son iguales. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 10

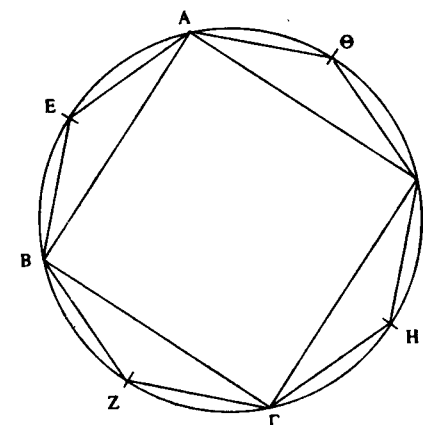
Todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base e igual altura.

Tenga, pues, un cono la misma base que un cilindro, el círculo $AB\Gamma\Delta$, e igual altura.

Digo que el cono es la tercera parte del cilindro, es decir que el cilindro es el triple del cono.

Pues, si el cilindro no es el triple del cono, el cilindro será o mayor que el triple del cono o menor que el triple del cono. Sea, en primer lugar, mayor que el triple e inscribese en el círculo $AB\Gamma\Delta$ el cuadrado $AB\Gamma\Delta$ [IV 6]. Entonces, el cuadrado $AB\Gamma\Delta$ es mayor que la mitad del círculo $AB\Gamma\Delta$. Levántese a partir del cuadrado $AB\Gamma\Delta$ un prisma de altura igual a la del cilindro. Entonces el prisma levantado es mayor que la mitad del

cilindro: puesto que, si circunscribimos un cuadrado en torno al círculo $AB\Gamma\Delta$ [IV 7], el cuadrado inscrito en el círculo $AB\Gamma\Delta$



es la mitad del circunscrito; y los sólidos levantados a partir de ellos son prismas paralelepípedos de la misma altura, y los sólidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases [XI 32]; entonces, el prisma levantado a partir del cuadrado $AB\Gamma\Delta$ es la mitad del prisma levantado a partir del cuadrado circunscrito en torno al círculo $AB\Gamma\Delta$ [XI 28, XII 6 y 7 Por.], y el cilindro es menor que el prisma levantado a partir del cuadrado circunscrito en torno al círculo $AB\Gamma\Delta$; luego el prisma levantado a partir del cuadrado $AB\Gamma\Delta$ y de la misma altura que el cilindro es mayor que la mitad del cilindro. Divídanse en dos partes iguales las circunferencias AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA por los puntos E , Z , H , Θ , y trácense AE , EB , BZ , $Z\Gamma$, ΓH , $H\Delta$, $\Delta\Theta$, ΘA ; entonces cada uno de los triángulos AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ es mayor que la mitad del segmento del círculo $AB\Gamma\Delta$ en el que está, como demostrábamos anteriormente [XII 2]. Levántense prismas de la misma altura que el cilindro sobre cada uno de los triángulos AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$; entonces cada uno de los

prismas levantados es mayor que la mitad del segmento de cilindro en el que está; puesto que, si trazamos paralelas a AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA por los puntos $EZH\Theta$ y completamos los paralelogramos sobre las (rectas) AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA y levantamos, a partir de ellos, sólidos paralelepípedos de igual altura que el cilindro, los prismas sobre los triángulos AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ son la mitad de cada uno de los levantados; y los segmentos del cilindro son menores que los sólidos paralelepípedos levantados; de modo que también los prismas (levantados) sobre los triángulos AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ son mayores que la mitad de los de los segmentos de cilindro en que están. Ahora, si dividimos en dos partes iguales las circunferencias que han quedado y trazamos rectas (uniendo los puntos de división) y levantamos prismas de la misma altura que el cilindro sobre cada uno de los triángulos y procedemos así sucesivamente, dejaremos ciertos segmentos de cilindro que serán menores que el exceso con el que el cilindro excede al triple del cono [X 1]. Déjense y sean AE , EB , BZ , $Z\Gamma$, ΓH , $H\Delta$, $\Delta\Theta$, ΘA ; entonces el prisma restante cuya base es el polígono $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ y su altura la misma que la del cilindro es mayor que el triple del cono. Pero el prisma cuya base es el polígono $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ y su altura la misma que la del cilindro es el triple de la pirámide cuya base es el polígono $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ y su vértice el mismo que el del cono [XII 7 Por.]; luego la pirámide cuya base es el polígono $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ y su vértice el mismo que el del cono es mayor que el cono que tiene como base el círculo $AB\Gamma\Delta$. Pero también es menor, porque está comprendida por él; lo cual es imposible. Por tanto el cilindro no es mayor que el triple del cono.

Digo ahora que el cilindro tampoco es menor que el triple del cono.

Pues, si fuera posible, sea el cilindro menor que el triple del cono; entonces, por inversión, el cono es mayor que la tercera parte del cilindro. Inscríbase el cuadrado $AB\Gamma\Delta$ en el círculo

lo $AB\Gamma\Delta$; entonces el cuadrado $AB\Gamma\Delta$ es mayor que la mitad del círculo $AB\Gamma\Delta$. Y levántese sobre el cuadrado $AB\Gamma\Delta$ una pirámide que tenga el mismo vértice que el cono; entonces la pirámide levantada es mayor que la mitad del cono; porque, como antes demostrábamos, si circunscribimos un cuadrado en torno al círculo, el cuadrado $AB\Gamma\Delta$ será la mitad del cuadrado circunscrito en torno al círculo; y si levantamos a partir de los cuadrados sólidos paralelepípedos de la misma altura que el cono que también se llaman prismas, el (sólido) levantado a partir del cuadrado $AB\Gamma\Delta$ será la mitad del levantado a partir del cuadrado circunscrito en torno al círculo, porque son entre sí como sus bases [XI 32]; de modo que también los tercios (están en la misma razón); así pues, la pirámide cuya base es el cuadrado $AB\Gamma\Delta$ es la mitad de la pirámide levantada a partir del cuadrado circunscrito en torno al círculo. Y la pirámide levantada sobre el cuadrado circunscrito en torno al círculo es mayor que el cono, pues lo comprende; luego la pirámide cuya base es el cuadrado $AB\Gamma\Delta$ y su vértice el mismo que el del cono es mayor que la mitad del cono. Divídanse en dos partes iguales las circunferencias AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA por los puntos E , Z , H , Θ y trácense AE , EB , BZ , $Z\Gamma$, ΓH , $H\Delta$, $\Delta\Theta$, ΘA ; entonces, cada uno de los triángulos AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ es mayor que la mitad del segmento del círculo $AB\Gamma\Delta$ en el que está. Ahora bien, levántese sobre cada uno de los triángulos AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ pirámides que tengan el mismo vértice que el cono; entonces cada una de las pirámides levantadas de la misma manera es mayor que la mitad del segmento de cono en el que está. Ahora, si dividimos en dos partes iguales las circunferencias que quedan y trazamos rectas (uniendo los puntos de división) y levantamos sobre cada uno de los triángulos pirámides que tengan el mismo vértice que el cono y procedemos así sucesivamente, dejaremos ciertos segmentos de cono que serán menores que el exceso con que el cono excede a la tercera parte del cilindro [X 1].

Déjense y sean los de AE, EB, BZ, ZΓ, ΓH, HΔ, ΔΘ, ΘA; entonces la pirámide restante cuya base es el polígono AEBZΓHΔΘ y su vértice el mismo que el del cono, es mayor que la tercera parte del cilindro. Pero la pirámide cuya base es el polígono AEBZΓHΔΘ y su vértice el mismo que el del cono es la tercera parte del prisma cuya base es el polígono AEBZΓHΔΘ y su altura la misma que la del cilindro; entonces el prisma cuya base es el polígono AEBZΓHΔΘ y su altura la misma que la del cilindro es mayor que el cilindro cuya base es el círculo ABΓΔ. Pero también es menor, porque está comprendido por él; lo cual es imposible. Luego el cilindro no es menor que el triple del cono. Pero se ha demostrado que tampoco es mayor que el triple. Por tanto, el cilindro es el triple del cono; de modo que el cono es la tercera parte del cilindro.

Por consiguiente, todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base que él e igual altura. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 11

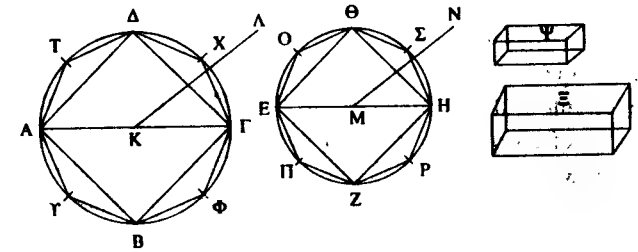
Los conos y cilindros que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

Haya unos conos y cilindros de la misma altura cuyas bases son los círculos ABΓΔ, EZHΘ, sus ejes KA, MN y los diámetros de sus bases AΓ, EH.

Digo que, como el círculo ABΓΔ es al círculo EZHΘ, así el cono AA al cono EN.

Porque, si no, como el círculo ABΓΔ es al círculo EZHΘ, así será el cono AA o a un sólido menor o a uno mayor que el cono EN. Séalo en primer lugar al (sólido) menor Ξ, y sea el sólido Ψ igual a aquello en lo que el sólido Ξ es menor que el cono EN; entonces el cono EN es igual a los sólidos Ξ, Ψ. Inscríbase el

cuadrado EZHΘ en el círculo EZHΘ; entonces el cuadrado es mayor que la mitad del círculo. Levántese a partir del cuadrado



EZHΘ una pirámide de igual altura que el cono; entonces la pirámide levantada es mayor que la mitad del cono: puesto que, si circunscribimos un cuadrado en torno al círculo y levantamos a partir de él una pirámide de igual altura que el cono, la pirámide inscrita es la mitad de la circunscrita, pues son entre sí como sus bases [XII 6]; mientras que el cono es menor que la pirámide circunscrita. Divídanse en dos partes iguales las circunferencias EZ, ZH, HΘ, ΘE, por los puntos O, Π, P, Σ, y trácese ΘO, OE, EΠ, ΠZ, ZP, PH, HΣ, ΣΘ. Entonces, cada uno de los triángulos ΘOE, EΠZ, ZPH, HΣΘ es mayor que la mitad del segmento de círculo en que está. Levántese sobre cada uno de los triángulos ΘOE, EΠZ, ZPH, HΣΘ una pirámide de igual altura a la del cono. Entonces cada una de las pirámides levantadas es mayor que la mitad del segmento de cono en que está. Ahora, si dividimos en dos partes iguales las circunferencias que quedan y trazamos rectas (uniendo los puntos de división) y levantamos sobre cada uno de los triángulos pirámides de igual altura a la del cono y procedemos así sucesivamente dejaremos ciertos segmentos de cono que serán menores que el sólido Ψ [X 1]. Déjense y sean los de ΘOE, EΠZ, ZPH, HΣΘ. Entonces, la pirámide restante cuya base es el polígono ΘOEΠZPHΣ y su altura la misma que la del cono es mayor que el sólido Ξ. Inscrí-

base también en el círculo $AB\Gamma\Delta$ el polígono $\Delta TAYB\Phi\Gamma X$ semejante y situado de manera semejante al polígono $\Theta O E \Pi Z P H \Sigma$, y levántese sobre él una pirámide de igual altura que el cono AA . Pues bien, dado que, como el cuadrado de AG es al cuadrado de EH , así el polígono $\Delta TAYB\Phi\Gamma X$ al polígono $\Theta O E \Pi Z P H \Sigma$ [XII 1], mientras que, como el cuadrado de AG es al cuadrado de EH , así el círculo $AB\Gamma\Delta$ al círculo $EZH\Theta$ [XII 2], entoncés, también, como el círculo $AB\Gamma\Delta$ es al círculo $EZH\Theta$, así el polígono $\Delta TAYB\Phi\Gamma X$ al polígono $\Theta O E \Pi Z P H \Sigma$. Pero, como el círculo $AB\Gamma\Delta$ es al círculo $EZH\Theta$, así el cono AA al sólido Ξ , y como el polígono $\Delta TAYB\Phi\Gamma X$ es al polígono $\Theta O E \Pi Z P H \Sigma$ así la pirámide cuya base es el polígono $\Delta TAYB\Phi\Gamma X$ y su vértice el punto Λ a la pirámide cuya base es el polígono $\Theta O E \Pi Z P H \Sigma$ y su vértice el punto N [XII 6]. Entonces, también, como el cono AA es al sólido Ξ , así la pirámide cuya base es el polígono $\Delta TAYB\Phi\Gamma X$ y su vértice el punto Λ a la pirámide cuya base es el polígono $\Theta O E \Pi Z P H \Sigma$ y su vértice el punto N [V 11]. Luego, por alternancia, como el cono AA es a la pirámide (inscrita) en él, así el sólido Ξ a la pirámide (inscrita) en el cono EN [V 6]. Pero el cono AA es mayor que la pirámide (inscrita) en él; entonces, el sólido Ξ es mayor que la pirámide inscrita en el cono EN . Pero también menor; lo cual es absurdo; por tanto, el cono AA no es a un sólido menor que el cono EN como el círculo $AB\Gamma\Delta$ al círculo $EZH\Theta$. De manera semejante demostraríamos que tampoco el cono EN es a algún sólido menor que el cono AA , como el círculo $EZH\Theta$ es al círculo $AB\Gamma\Delta$.

Digo ahora que tampoco el cono AA es a algún sólido mayor que el cono EN como el círculo $AB\Gamma\Delta$ es al círculo $EZH\Theta$.

Pues, si fuera posible, séalo al (sólido) mayor Ξ . Entonces, por inversión, como el círculo $EZH\Theta$ es al círculo $AB\Gamma\Delta$, así el sólido Ξ al cono AA . Pero, como el sólido Ξ es al cono AA , así el cono EN a un sólido menor que el cono AA ; entonces, también, como el círculo $EZH\Theta$ es al círculo $AB\Gamma\Delta$, así el cono EN a

un sólido menor que el cono AA ; lo cual se ha demostrado que es imposible; luego el cono AA no es a un sólido mayor que el cono EN como el círculo $AB\Gamma\Delta$ al círculo $EZH\Theta$. Pero se ha demostrado que tampoco lo es a uno menor; por tanto, como el círculo $AB\Gamma\Delta$ es al círculo $EZH\Theta$, así el cono AA al cono EN .

Pero como el cono es al cono, así el cilindro al cilindro, porque cada uno es respectivamente el triple del otro [XII 10]. Luego también, como el círculo $AB\Gamma\Delta$ es al círculo $EZH\Theta$, así los cilindros (levantados) sobre ellos (que son) de la misma altura.

Por consiguiente, los conos y cilindros que tienen la misma altura son entre sí como sus bases. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 12

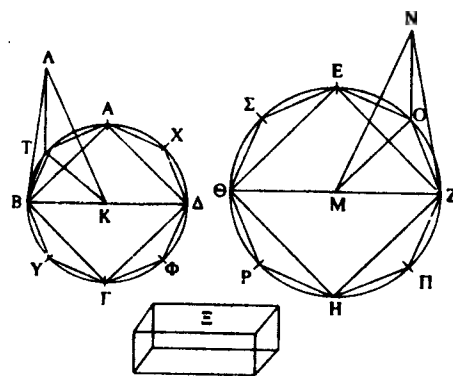
Los conos y cilindros semejantes guardan entre sí una razón triplicada de (la que guardan) los diámetros de sus bases.

Sean unos cilindros y conos semejantes cuyas bases son los círculos $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$; $B\Delta$, $Z\Theta$ los diámetros de sus bases y $K\Lambda$, MN los ejes de los conos y los cilindros.

Digo que el cono cuya base es el círculo $AB\Gamma\Delta$ y su vértice el punto Λ guarda con el cono cuya base es el círculo $EZH\Theta$ y su vértice el punto N una razón triplicada de la que $B\Delta$ (guarda) con $Z\Theta$.

Pues, si el cono $AB\Gamma\Delta\Lambda$ no guarda con el cono $EZH\Theta N$ una razón triplicada de la que $B\Delta$ guarda con $Z\Theta$, el cono $AB\Gamma\Delta\Lambda$ guardará una razón triplicada con un sólido menor que el cono $EZH\Theta N$ o con uno mayor. Guárdela, en primer lugar, con el sólido menor Ξ e inscribase el cuadrado $EZH\Theta$ en el círculo $EZH\Theta$ [IV 6]; entonces el cuadrado $EZH\Theta$ es mayor que la mitad del círculo $EZH\Theta$. Levántese sobre el cuadrado $EZH\Theta$ una pirámide

que tenga la misma altura que el cono; entonces la pirámide levantada es mayor que la mitad del cono. Ahora, divídanse en



dos partes iguales las circunferencias EZ, ZH, HΘ, ΘE por los puntos O, Π, P, Σ, y trácense EO, OZ, ZΠ, ΠH, HP, PΘ, ΘΣ, ΣE. Entonces cada uno de los triángulos EOZ, ZΠH, HPΘ, ΘΣE es mayor que la mitad del segmento del círculo EZHΘ en el que está; levántese sobre cada uno de los triángulos EOZ, ZΠH, HPΘ, ΘΣE una pirámide que tenga el mismo vértice que el cono; entonces cada una de las pirámides levantadas es también mayor que la mitad del segmento de cono en el que está. Ahora, si dividimos en dos partes iguales las circunferencias que quedan y trazamos rectas (uniendo los puntos de división) y levantamos sobre cada uno de los triángulos pirámides que tengan el mismo vértice que el cono y procedemos así sucesivamente dejaremos ciertos segmentos de cono que serán menores que el exceso con el que el cono EZHΘN excede al sólido ε [X 1]. Déjense y sean los de EO, OZ, ZΠ, ΠH, HP, PΘ, ΘΣ, ΣE; entonces, la pirámide restante cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N es mayor que el sólido ε. Inscríbese también en el círculo ABΓΔ el polígono ATBYΓΦΔX semejante y situado

de manera semejante al polígono EOZΠHPΘΣ, y levántese sobre el polígono ATBYΓΦΔX una pirámide que tenga el mismo vértice que el cono y sea ABT uno de los triángulos que comprenden la pirámide cuya base es el polígono ATBYΓΦΔX y su vértice el punto A y sea NZO uno de los triángulos que comprenden la pirámide cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N, y trácense KT, MO. Ahora bien, como el cono ABΓΔA es semejante al cono EZHΘN, entonces, como BA es a ZΘ, así el eje KA al eje MN [XI Def. 24]. Pero, como BA es a ZΘ, así BK es a ZM; luego, como BK es a ZM, así KA a MN. Y, por alternancia, como BK es a KA, así ZM a MN [V 16]. Ahora bien, los lados que comprenden los ángulos iguales BKA, ZMN son proporcionales; entonces, el triángulo BKA es semejante al triángulo ZMN [VI 6]. A su vez, dado que, como BK es a KT, así ZM a MO, y comprenden los ángulos iguales BKT, ZMO: porque la parte que el ángulo BKT es de los cuatro (ángulos) rectos correspondientes al centro K, la misma parte es también el ángulo ZMO de los cuatro (ángulos) rectos correspondientes al centro M; pues bien, como los lados que comprenden ángulos iguales son proporcionales, entonces el triángulo BKT es semejante al triángulo ZMO [VI 6]. A su vez, puesto que se ha demostrado que, como BK es a KA, así ZM a MN, y BK es igual a KT mientras que ZM es igual a OM, entonces, como TK es a KA, así OM a MN. Y los lados que (comprenden) los ángulos iguales TKA, OMN —porque son rectos— son proporcionales; luego el triángulo AKT es semejante al triángulo NMO [VI 6]. Y como, por la semejanza de los triángulos AKB, NMZ, como AB es a BK, así NZ a ZM, y por la semejanza de los triángulos BKT, ZMO, como KB es a BT, así MZ a ZO, entonces, por igualdad, como AB es a BT, así NZ a ZO [V 22]. A su vez, dado que, por la semejanza de los triángulos ATK, NOM, como AT es a TK, así NO a OM, y por la semejanza de los triángulos TKB, OMZ, como KT es a TB, así MO a OZ, entonces, por igualdad, como AT es a TB, así NO a OZ

[V 22]. Pero se ha demostrado que también, como TB es a BA, así OZ a ZN. Luego, por igualdad, como TA es a AB, así ON a NZ [V 22]. Por tanto, los lados de los triángulos ATB, NOZ son proporcionales; luego los triángulos ATB, NOZ son equiangulares [VI 5]; de modo que también son semejantes [VI Def. 1]. Por tanto, la pirámide cuya base es el triángulo BKT y su vértice el punto A es semejante a la pirámide cuya base es el triángulo ZMO y su vértice el punto N. Pues están comprendidas por planos semejantes e iguales en número [XI Def. 9]. Pero las pirámides semejantes que tienen como bases triángulos guardan entre sí una razón triplicada de la que guardan sus lados correspondientes [XII 8]. Luego la pirámide BKTA guarda con la pirámide ZMON una razón triplicada de la que BK guarda con ZM. De manera semejante, si trazamos rectas de los (puntos) A, X, Δ, Φ, Γ, Y al (punto) K y de los (puntos) E, Σ, Θ, P, H, Π al punto M, y levantamos sobre cada uno de los triángulos pirámides que tengan el mismo vértice que los conos, demostraremos que cada una de las pirámides dispuestas de manera semejante guarda con cada una de las pirámides dispuestas de manera semejante una razón triplicada de la que el lado correspondiente BK guardará con el lado correspondiente ZM, es decir, de la que BA guarda con ZΘ. Y como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes a todos los consecuentes [V 12]; entonces, como la pirámide BKTA es a la pirámide ZMON, así la pirámide entera cuya base es el polígono ATBYΓΦΔX y su vértice el punto A a la pirámide entera cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N; de modo que también la pirámide cuya base es ATBYΓΦΔX y su vértice el punto A guarda con la pirámide cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N una razón triplicada de la que BA (guarda) con ZΘ. Pero se ha supuesto que también el cono cuya base es el círculo ABΓΔ y su vértice el punto A guarda con el sólido Ξ una razón triplicada de la

que BA (guarda) con ZΘ; entonces, como el cono cuya base es el círculo ABΓΔ y su vértice el punto A es al sólido Ξ, así la pirámide cuya base es el polígono ATBYΓΦΔX y su vértice el punto A es a la pirámide cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N. Entonces, por alternancia, como el cono cuya base es el círculo ABΓΔ y su vértice el punto A es a la pirámide (inscrita) en él, cuya base es el polígono ATBYΓΦΔX y su vértice el punto A, así el (sólido) Ξ a la pirámide cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N [V 16]. Pero el antedicho cono es mayor que la pirámide (inscrita) en él: porque la comprende. Entonces el sólido Ξ es también mayor que la pirámide cuya base es el polígono EOZΠHPΘΣ y su vértice el punto N. Pero también es menor; lo cual es imposible. Por tanto, el cono cuya base es el círculo ABΓΔ y su vértice el punto A no guarda con un sólido menor que el cono cuya base es el círculo EZHΘ y su vértice el punto N una razón triplicada de la que BA guarda con ZΘ. De manera semejante demostraríamos que tampoco el cono EZHΘN guarda con un sólido menor que el cono ABΓΔA una razón triplicada de la que ZΘ (guarda) con BA.

Digo ahora que tampoco el cono ABΓΔA guarda con un sólido mayor que el cono EZHΘN una razón triplicada de la que BA guarda con ZΘ.

Pues, si fuera posible, guárdela con el (sólido) mayor Ξ. Entonces, por inversión, el sólido Ξ guarda con el cono ABΓΔA una razón triplicada de la que ZΘ (guarda) con BA. Pero, como el sólido Ξ es al cono ABΓΔA, así el cono EZHΘN a un sólido menor que el cono ABΓΔA. Entonces, también, el cono EZHΘN guarda con un sólido menor que el cono ABΓΔA una razón triplicada de la que ZΘ guarda con BA; lo cual se ha demostrado que es imposible; luego el cono ABΓΔA no guarda con un sólido mayor que el cono EZHΘN una razón triplicada de la que BA guarda con ZΘ. Pero se ha demostrado que tampoco con uno

menor. Por tanto, el cono $AB\Gamma\Delta\Lambda$ guarda con el cono $EZH\Theta\Xi$ una razón triplicada de la que BA guarda con $Z\Theta$.

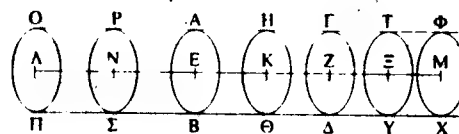
Ahora bien, como el cono es al cono, así el cilindro al cilindro: porque el cilindro es el triple del cono que está sobre la misma base y tiene igual altura que el propio cono [XII 10]. Luego el cilindro guarda con el cilindro una razón triplicada de la que BA (guarda) con $Z\Theta$.

Por consiguiente, los conos y cilindros semejantes guardan entre sí una razón triplicada de las de los diámetros de sus bases. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 13

Si un cilindro es cortado por un plano que sea paralelo a los planos opuestos, entonces, como el cilindro es al cilindro, así el eje es al eje.

Sea cortado el cilindro $\Lambda\Delta$ por el plano $H\Theta$ que es paralelo a los planos opuestos $AB, \Gamma\Delta$, y encuentre el plano $H\Theta$ al eje en el punto K .



Digo que, como el cilindro BH es al cilindro $H\Delta$, así el eje EK al eje KZ .

Prolónguese, pues, el eje EZ por cada lado hasta los puntos Λ, M y dispónganse cuantos ejes se quiera $EN, N\Lambda$ iguales al eje EK y cuantos se quiera $Z\Xi, \Xi M$ iguales a ZK . Y considérese sobre el eje AM el cilindro OX cuyas bases son los círculos $OP, \Lambda M$.

ΦX . Trácese, a través de los puntos N, Ξ , planos paralelos a $AB, \Gamma\Delta$ y a las bases del cilindro OX y háganse los círculos $P\Xi, TY$ en torno a los centros N, Ξ . Y como los ejes $\Lambda N, NE, EK$ son iguales entre sí, entonces los cilindros $\Pi P, PB, BH$ son entre sí como sus bases [XII 11]; pero sus bases son iguales; luego los cilindros $\Pi P, PB, BH$ son iguales entre sí. Pues bien, como los ejes $\Lambda N, NE, EK$ son iguales entre sí, y los cilindros $\Pi P, PB, BH$ también son iguales entre sí, y es igual el número (de los primeros) al número (de los segundos), entonces, el eje $K\Lambda$ será el mismo múltiplo del eje EK que el cilindro ΠH del cilindro $H\Lambda$. Por lo mismo, entonces, el eje MK es el mismo múltiplo del eje KZ que el cilindro XH del cilindro $H\Delta$. Y si el eje $K\Lambda$ es igual al eje KM , el cilindro ΠH será también igual al cilindro HX , y si el eje es mayor que el eje, el cilindro será también mayor que el cilindro, y si es menor, menor. Entonces, siendo cuatro magnitudes los ejes EK, KZ y los cilindros $BH, H\Delta$, se han tomado los equimúltiplos, a saber: el eje $K\Lambda$ y el cilindro ΠH , del eje EK y el cilindro BH ; y (equimúltiplos, a saber) el eje KM y el cilindro HX , del eje KZ y el cilindro $H\Delta$; y se ha demostrado que si el eje $K\Lambda$ excede al eje KM , también el cilindro ΠH excede al cilindro HX , y si es igual, igual y si menor, menor. Por tanto, como el eje EK es al eje KZ , así el cilindro BH al cilindro $H\Delta$ [V Def. 5]. Q. E. D.

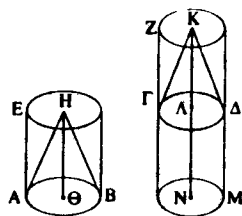
PROPOSICIÓN 14

Los conos y cilindros que están sobre bases iguales son entre sí como sus alturas.

Estén, pues, los cilindros EB, ZA sobre bases iguales, a saber: los círculos $AB, \Gamma\Delta$.

Digo que, como el cilindro EB es al cilindro ZA , así el eje $H\Theta$ al eje $K\Lambda$.

Pues prolongúese el eje $\kappa\lambda$ hasta el punto N y hágase λN igual al eje $H\theta$, y considérese el cilindro ΓM en torno al eje λN .



Pues bien, como los cilindros EB , ΓM tienen la misma altura, son entre sí como sus bases [XII 11]. Pero las bases son iguales entre sí; luego los cilindros EB , ΓM son también iguales. Y como el cilindro ZM ha sido cortado por el plano $\Gamma\Delta$ que es paralelo a sus planos opuestos, entonces, como

el cilindro ΓM es al cilindro $Z\Delta$, así el eje λN al eje $\kappa\lambda$ [XII 13]. Pero el cilindro ΓM es igual al cilindro EB , y el eje λN al eje $H\theta$; luego, como el cilindro EB es al cilindro $Z\Delta$, así el eje $H\theta$ al eje $\kappa\lambda$. Pero como el cilindro EB es al cilindro $Z\Delta$, así el cono ABH al cono $\Gamma\Delta K$ [XII 10]. Por tanto, como el eje $H\theta$ es al eje $\kappa\lambda$, así el cono ABH al cono $\Gamma\Delta K$ y el cilindro EB al cilindro $Z\Delta$. [V Def. 5]. Q. E. D.

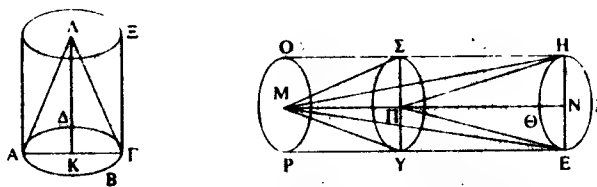
PROPOSICIÓN 15

Las bases de los conos y cilindros iguales están inversamente relacionadas con las alturas, y aquellos conos y cilindros cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas son iguales.

Sean iguales los conos y cilindros cuyas bases son los círculos $AB\Gamma\Delta$, $EZH\theta$; sean $A\Gamma$, EH los diámetros (de las bases) y $\kappa\lambda$, MN los ejes que son también las alturas de los conos o cilindros, y complétense los cilindros $A\Xi$, EO .

Digo que las bases de los cilindros $A\Xi$, EO están inversamente relacionadas con sus alturas, y como la base $AB\Gamma\Delta$ es a la base $EZH\theta$, así la altura MN a la altura $\kappa\lambda$.

Pues la altura $\kappa\lambda$ o es igual a la altura MN o no lo es. Sea en primer lugar igual, y el cilindro $A\Xi$ es también igual al cilindro



EO . Pero los conos y cilindros que tienen la misma altura son entre sí como sus bases [XII 11]; entonces, la base $AB\Gamma\Delta$ es igual a la base $EZH\theta$. De modo que también, en razón inversa, como la base $AB\Gamma\Delta$ es a la base $EZH\theta$, así la altura MN a la altura $\kappa\lambda$. Pero ahora no sea la altura $\kappa\lambda$ igual a la altura MN sino que sea mayor MN , y quítese de la altura MN , ΠN igual a $\kappa\lambda$, y córtese el cilindro EO por el punto Π con el plano $\tau\gamma\sigma$ paralelo a los planos de los círculos $EZH\theta$, PO , y considérese el cilindro $E\Xi$ (levantado) a partir del círculo $EZH\theta$ como base y con la altura $N\Pi$. Ahora bien, como el cilindro $A\Xi$ es igual al cilindro EO , entonces, como el cilindro $A\Xi$ es al cilindro $E\Xi$, así el cilindro EO al cilindro $E\Xi$ [V 7]. Pero como el cilindro $A\Xi$ es al cilindro $E\Xi$, así la base $AB\Gamma\Delta$ a la base $EZH\theta$: porque los cilindros $A\Xi$, $E\Xi$ tienen la misma altura [XII 11]; y como el cilindro EO es al cilindro $E\Xi$, así la altura MN a la altura ΠN : porque el cilindro EO ha sido cortado por un plano que es paralelo a sus planos opuestos [XII 13]. Luego, como la base $AB\Gamma\Delta$ es a la base $EZH\theta$, así la altura MN a la altura ΠN [V 11]. Pero la altura ΠN es igual a la altura $\kappa\lambda$; entonces, como la base $AB\Gamma\Delta$ es a la base $EZH\theta$, así la altura MN a la altura $\kappa\lambda$. Por tanto, las bases de los cilindros $A\Xi$, EO están inversamente relacionadas con sus alturas.

Pero, ahora, estén las bases de los cilindros $A\Xi$, EO inversamente relacionadas con sus alturas, y, como la base $AB\Gamma\Delta$ es a la base $EZH\theta$, así la altura MN a la altura $\kappa\lambda$.

Digo que el cilindro $A\Xi$ es igual al cilindro EO .

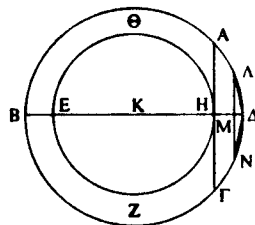
Pues, siguiendo la misma construcción, dado que, como la base $AB\Gamma\Delta$ es a la base $EZH\Theta$, así la altura MN a la altura KA , mientras que la altura KA es igual a la altura PN , entonces, como la base $AB\Gamma\Delta$ es a la base $EZH\Theta$, así la altura MN a la altura PN . Pero como la base $AB\Gamma\Delta$ es a la base $EZH\Theta$, así el cilindro $A\Xi$ al cilindro $E\Xi$: porque tienen la misma altura [XII 11]; y como la altura MN es a la altura PN , así el cilindro EO al cilindro $E\Xi$ [XII 13]; entonces, como el cilindro $A\Xi$ es al cilindro $E\Xi$, así el cilindro EO al cilindro $E\Xi$ [V 11]. Por tanto el cilindro $A\Xi$ es igual al cilindro EO [V 9]. Y de la misma forma también en (el caso de) los conos. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 16

Dados dos círculos con el mismo centro, inscribir en el círculo mayor un polígono equilátero y de un número par de lados que no toque al círculo menor.

Sean $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ los dos círculos con el mismo centro K .

Así pues, hay que inscribir en el círculo mayor $AB\Gamma\Delta$ un polígono equilátero y con un número par de lados que no toque al círculo $EZH\Theta$.



Trácese, pues, por el centro K , la recta $BK\Delta$, y trácese, por el punto H , la (recta) HA formando ángulos rectos con la recta BA y prolongúese hasta el punto Γ ; entonces $A\Gamma$ toca el círculo $EZH\Theta$ [III 16 Por.]. Ahora, si dividimos en dos partes iguales la circunferencia BAA , y su mitad en dos partes iguales, y procedemos así sucesivamente,

dejaremos una circunferencia menor que $\Lambda\Delta$; déjese y sea $\Lambda\Delta$; trácese, de Λ a $B\Delta$, la perpendicular ΛM y prolongúese hasta N , y trácese $\Lambda\Delta$, ΔN ; entonces $\Lambda\Delta$ es igual a ΔN [III 3; I 4]. Y como ΛN es paralela a $A\Gamma$ y $A\Gamma$ toca el círculo $EZH\Theta$, entonces, ΛN no toca el círculo $EZH\Theta$; luego $\Lambda\Delta$, ΔN están lejos de tocar el círculo $EZH\Theta$. Ahora, si adaptamos sucesivamente rectas iguales a $\Lambda\Delta$ al círculo $AB\Gamma\Delta$ inscribiremos en el círculo $AB\Gamma\Delta$ un polígono equilátero y de un número par de lados que no toque el círculo menor $EZH\Theta$. Q. E. F.

PROPOSICIÓN 17

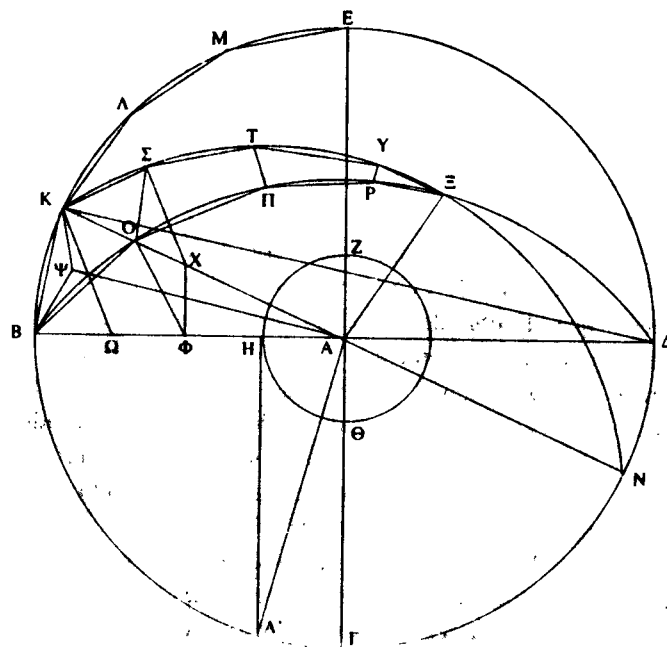
Dadas dos esferas con el mismo centro, inscribir en la esfera mayor un sólido poliedro que no toque la esfera menor en su superficie.

Considérense dos esferas con el mismo centro A .

Así pues, hay que inscribir en la esfera mayor un sólido poliedro que no toque la esfera menor en su superficie.

Córtense las esferas por un plano a través del centro; entonces las secciones serán círculos: porque la esfera se generaba permaneciendo fijo el diámetro y haciendo girar el semicírculo en torno a él [XI Def. 14]; de modo que sea cual sea la posición en que consideremos el semicírculo, el plano trazado a través de él producirá un círculo en la superficie de la esfera. Y está claro que también es el máximo posible: porque el diámetro de la esfera que es el diámetro del semicírculo y, por supuesto, del círculo, es mayor que todas las (rectas) trazadas en el círculo o en la esfera. Así pues, sea $B\Gamma\Delta E$ el círculo en la esfera mayor, y el círculo $ZH\Theta$ el círculo en la esfera menor, y trácese sus dos diámetros BA , ΓE que forman ángulos rectos entre sí, y, dados los dos círculos $B\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta$ con el mismo cen-

tro, inscribábase en el círculo mayor $B\Gamma\Delta E$, un polígono equilátero y de un número par de lados que no toque al círculo menor



$ZH\Theta$; sean BK , KA , AM , ME sus lados en el cuadrante BE , y una vez trazada KA , prolongúese hasta N , y levántese a partir del punto A , $A\Xi$ formando ángulos rectos con el plano del círculo $B\Gamma\Delta E$ y encuentre la superficie de la esfera en el punto Ξ ; trácese planos a través de $A\Xi$ y cada una de las (rectas) BA , KN ; entonces, por las razones antedichas producirán círculos máximos en la superficie de la esfera. Produzcanse y sean $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ sus semicírculos sobre los diámetros BA , KN . Y puesto que ΞA forma ángulos rectos con el plano del círculo $B\Gamma\Delta E$, entonces, todos los planos que pasan por ΞA forman ángulos rectos con el plano del círculo $B\Gamma\Delta E$ [XI 18]; de modo que los semicírcu-

los $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ forman ángulos rectos con el plano del círculo $B\Gamma\Delta E$. Y como $B\Xi\Delta$, $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ son semicírculos iguales —porque tienen los diámetros iguales BA , KN — los cuadrantes BE , $B\Xi$, $K\Xi$ son iguales entre sí. Entonces, cuantos lados del polígono hay en el cuadrante BE , tantos hay también en los cuadrantes $B\Xi$, $K\Xi$, iguales a las rectas BK , KA , AM , ME . Inscribábase y sean BO , OP , PP , $P\Xi$, $K\Xi$, ΣT , TY , $Y\Xi$, y trácese ΣO , TP , YP , y trácese, desde los puntos O , Σ perpendiculares al plano del círculo $B\Gamma\Delta E$ [XI 11]; entonces, caerán sobre las secciones comunes de los planos BA , KN : porque los planos de los (semicírculos) $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ forman ángulos rectos con el plano del círculo $B\Gamma\Delta E$. Caigan y sean $O\Phi$, ΣX , y trácese $X\Phi$. Ahora bien, como en los semicírculos iguales $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ se han quitado las (rectas) iguales BO , $K\Xi$ y se han trazado las perpendiculares $O\Phi$, ΞX ; (entonces) $O\Phi$ es igual a ΣX y $B\Phi$ a KX [III 27 y I 26]. Pero la (recta) entera BA también es igual a la (recta) entera KA ; entonces, la restante ΦA es igual a la restante XA ; luego, como $B\Phi$ es a ΦA , así KX a XA ; por tanto, $\Xi\Phi$ es paralela a KB [VI 2]. Y como cada una de las (rectas) $O\Phi$, ΣX forma ángulos rectos con el plano del círculo $B\Gamma\Delta E$, entonces $O\Phi$ es paralela a ΣX [XI 6]. Pero se ha demostrado que es igual a ella; luego $X\Phi$, ΣO son también iguales y paralelas [I 33]. Y como $X\Phi$ es paralela a ΣO , mientras que $X\Phi$ es paralela a KB ; entonces ΣO es también paralela a KB [XI 9]. Y BO , $K\Xi$ las unen (por sus extremos), entonces, el cuadrilátero $KBO\Xi$ está en un plano: porque, si hay dos rectas paralelas y se toman puntos al azar en ellas, la recta que une los puntos está en el mismo plano que las paralelas [XI 7]. Por lo mismo, entonces, cada uno de los cuadriláteros ΣOPT , $TPPY$ están también en un plano [XI 2]. Y también el triángulo $YP\Xi$ está en un plano. Entonces, si consideramos rectas trazadas desde los puntos O , Σ , P , T , P , Y hasta el (punto) A , se construirá una figura poliédrica sólida entre las circunferencias $B\Xi$, $K\Xi$ compuesta de pirámides cuyas bases son los cua-

driláteros $KBO\Sigma$, $\Sigma O\Pi T$, $T\Pi P Y$ y el triángulo $Y P E$ y el vértice el punto A. Pero, si seguimos la misma construcción en el caso de cada uno de los lados $K\Lambda$, ΛM , ME , como en el caso de BK , y además en el caso de los tres cuadrantes que quedan, se construirá una figura poliédrica inscrita en la esfera comprendida por pirámides cuyas bases son dichos cuadriláteros y el triángulo $Y P E$ y los correspondientes a ellos y su vértice el punto A.

Digo que dicho poliedro no tocará la esfera menor en la superficie en la que está el círculo $ZH\Theta$.

Trácese del punto A al plano del cuadrilátero $KBO\Sigma$ la perpendicular AP y encuentre el plano en el punto Ψ [XI 11], y trácense ΨB , ΨK . Ahora bien, como AP forma ángulos rectos con el plano del cuadrilátero $KBO\Sigma$, entonces también forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano del cuadrilátero [XI Def. 3]. Luego AP forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) $B\Psi$, ΨK . Y como AB es igual a AK , el cuadrado de AB es también igual al cuadrado de AK . Y los cuadrados de AP , ΨB son iguales al cuadrado de AB : porque el ángulo correspondiente a Ψ es recto [I 47]. Y los cuadrados AP , ΨK son iguales al cuadrado de AK [id.]. Luego los cuadrados de AP , ΨB son iguales a los cuadrados de AP , ΨK . Quítese de ambos el de AP ; entonces el cuadrado restante, el de $B\Psi$, es igual al cuadrado restante, el de ΨK ; luego $B\Psi$ es igual a ΨK . Demostraríamos de manera semejante que las rectas trazadas desde Ψ hasta O , Σ son iguales a cada una de las (rectas) $B\Psi$, ΨK . Luego el círculo descrito con centro Ψ y, como distancia, una de las (rectas) ΨB , ΨK pasará también a través de O , Σ y $KBO\Sigma$ será un cuadrilátero en un círculo.

Y como KB es mayor que $X\Phi$, mientras que $X\Phi$ es igual a ΣO , entonces KB es mayor que ΣO . Pero KB es igual que cada una de las (rectas) $K\Sigma$, BO ; luego cada una de las (rectas) $K\Sigma$, BO es mayor que Σ . Y como $KBO\Sigma$ es un cuadrilátero en un círculo, y KB , BO , $K\Sigma$ son iguales y $O\Sigma$ menor y $B\Psi$ es el radio del

círculo, entonces, el cuadrado de KB es mayor que el doble del cuadrado de $B\Psi$. Trácese la perpendicular $K\Omega$ del (punto) K a la (recta) $B\Phi$. Y como $B\Delta$ es menor que el doble de $\Delta\Omega$, y, como $B\Delta$ es a $\Delta\Omega$, así el (rectángulo comprendido) por ΔB , $B\Omega$ al (rectángulo comprendido) por $\Delta\Omega$, ΩB , si construimos el cuadrado de $B\Omega$ y completamos el paralelogramo sobre $\Omega\Delta$, entonces, el (rectángulo comprendido) por ΔB , $B\Omega$ es menor que el doble del (rectángulo comprendido) por $\Delta\Omega$, ΩB . Y si se traza $K\Delta$, el (rectángulo comprendido) por ΔB , $B\Omega$ es igual al cuadrado de BK , y el (rectángulo comprendido) por $\Delta\Omega$, ΩB es igual al cuadrado de $K\Omega$ [III 31, VI 8 y Por.]; luego el cuadrado de KB es menor que el doble del cuadrado de $K\Omega$. Pero el cuadrado de KB es mayor que el doble del cuadrado de $B\Psi$; entonces el cuadrado de $K\Omega$ es mayor que el cuadrado de $B\Psi$. Ahora bien, como BA es igual a KA , el cuadrado de BA es igual al cuadrado de KA . Y los cuadrados de $B\Psi$, ΨA son iguales al cuadrado de BA , y los cuadrados de $K\Omega$, ΩA son iguales al cuadrado de KA [I 47]; luego los cuadrados de $B\Psi$, ΨA son iguales a los cuadrados de $K\Omega$, ΩA , de los cuales el cuadrado de $K\Omega$ es mayor que el de $B\Psi$; por tanto, el cuadrado restante, el de ΩA es menor que el cuadrado de ΨA . Luego $A\Psi$ es mayor que $A\Omega$; entonces $A\Psi$ es mucho mayor que AH . Y $A\Psi$ está en una base del poliedro y AH en la superficie de la esfera menor; de modo que el poliedro no toca la esfera menor en su superficie.

Por consiguiente, dadas dos esferas con el mismo centro, se ha inscrito, en la esfera mayor, un sólido poliedro que no toca la esfera menor en su superficie. Q. E. F.

Porisma:

Pero también, si se inscribe en otra esfera un sólido poliedro semejante al sólido poliedro inscrito en la esfera $B\Gamma\Delta E$, el sólido poliedro (inscrito) en la esfera $B\Gamma\Delta E$ guarda con el sólido poliedro (inscrito) en la otra esfera una razón triplicada de la que el diámetro de la esfera $B\Gamma\Delta E$ guarda con el diámetro

de la otra esfera. Pues si se dividen los sólidos en sus pirámides semejantes en número y disposición, las pirámides serán semejantes. Pero las pirámides semejantes guardan entre sí una razón triplicada de la de sus lados correspondientes [XII 8 Por.]. Entonces, la pirámide cuya base es el cuadrilátero $KBO\Xi$ y su vértice el punto A guarda con la pirámide dispuesta de modo semejante en la otra esfera una razón triplicada de la que el lado correspondiente guarda con el lado correspondiente, es decir, de la que el radio AB de la esfera con centro A (guarda) con el radio de la otra esfera. De manera semejante, cada pirámide de las de la esfera con centro A guardará con cada pirámide dispuesta de manera semejante de la otra esfera una razón triplicada de la que (guarda) AB con el radio de la otra esfera. Ahora bien, como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes a todos los consecuentes [V 12]; de modo que el sólido poliedro entero (inscrito) en la esfera con centro A guardará con el sólido poliedro entero (inscrito) en la otra esfera una razón triplicada de la que AB guarda con el radio de la otra esfera, es decir, de la que el diámetro BA guarda con el diámetro de la otra esfera. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 18

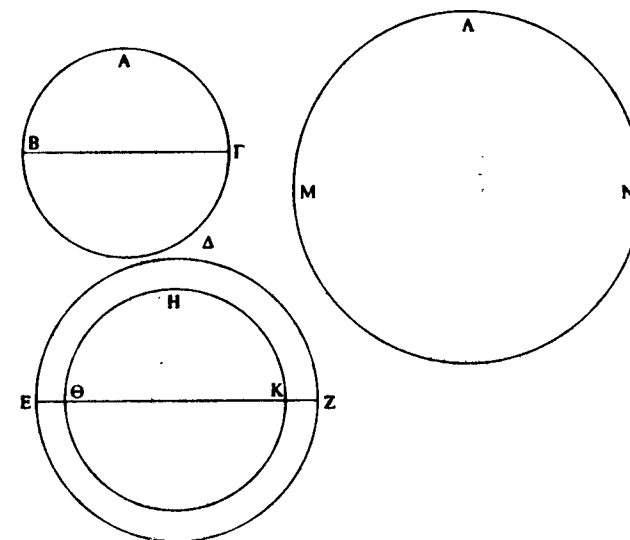
Las esferas guardan entre sí una razón triplicada de la de sus respectivos diámetros.

Consideremos las esferas $AB\Gamma$, ΔEZ y sus diámetros $B\Gamma$, EZ .

Digo que la esfera $AB\Gamma$ guarda con la esfera ΔEZ una razón triplicada de la que $B\Gamma$ guarda con EZ .

Pues, si la esfera $AB\Gamma$ no guarda con la esfera ΔEZ una razón triplicada de la que $B\Gamma$ guarda con EZ , entonces, la esfera $AB\Gamma$ guardará una razón triplicada de la que $B\Gamma$ guarda con EZ

con una esfera menor que ΔEZ o con una mayor. Guárdela en primer lugar con la (esfera) menor $H\Theta K$, y considérese ΔEZ en



torno al mismo centro que $H\Theta K$, e inscribase en la esfera mayor el sólido poliedro ΔEZ que no toque la esfera menor $H\Theta K$ en su superficie [XII 17], e inscribase también en la esfera $AB\Gamma$ un sólido poliedro semejante al sólido poliedro (inscrito) en la esfera ΔEZ ; entonces el sólido poliedro (inscrito) en $AB\Gamma$ guarda con el sólido poliedro (inscrito) en ΔEZ una razón triplicada de la que $B\Gamma$ guarda con EZ [XII 17 Por.]. Pero la esfera $AB\Gamma$ guarda con la esfera $H\Theta K$ una razón triplicada de la que $B\Gamma$ guarda con EZ ; luego, como la esfera $AB\Gamma$ es a la esfera $H\Theta K$, así el sólido poliedro (inscrito) en la esfera $AB\Gamma$ al sólido poliedro (inscrito) en la esfera ΔEZ ; y, por alternancia, como la esfera $AB\Gamma$ es al sólido poliedro (inscrito) en ella, así la esfera $H\Theta K$ al sólido poliedro (inscrito) en la esfera ΔEZ [V 16]. Pero la esfera $AB\Gamma$ es mayor que el poliedro (inscrito) en ella; luego la esfe-

ra $\text{H}\Theta\text{K}$ es también mayor que el sólido poliedro (inscrito) en la esfera ΔEZ . Pero también menor —porque es comprendida por él— por tanto, la esfera $\text{AB}\Gamma$ no guarda con una esfera menor que ΔEZ una razón triplicada de la que el diámetro $\text{B}\Gamma$ guarda con el (diámetro) EZ . De manera semejante demostraríamos que la esfera ΔEZ tampoco guarda con una esfera menor que $\text{AB}\Gamma$ una razón triplicada de la que EZ guarda con $\text{B}\Gamma$.

Digo ahora que la esfera $\text{AB}\Gamma$ tampoco guarda con una esfera mayor que ΔEZ una razón triplicada de la que $\text{B}\Gamma$ guarda con EZ .

Pues, si fuera posible, guárdela con la mayor ΛMN ; entonces, por inversión, la esfera ΛMN guarda con la esfera $\text{AB}\Gamma$ una razón triplicada de la que el diámetro EZ guarda con el diámetro $\text{B}\Gamma$. Pero, como la esfera ΛMN es a la esfera $\text{AB}\Gamma$, así la esfera ΔEZ a una esfera menor que $\text{AB}\Gamma$; porque ΛMN es mayor que ΔEZ , según se ha demostrado antes [XII 2 Lema]. Entonces la esfera ΔEZ guarda con una esfera menor que la esfera $\text{AB}\Gamma$ una razón triplicada de la que EZ guarda con $\text{B}\Gamma$; lo cual se ha demostrado que es imposible. Por tanto, la esfera $\text{AB}\Gamma$ no guarda con una esfera mayor que ΔEZ una razón triplicada de la que $\text{B}\Gamma$ guarda con EZ . Pero se ha demostrado que tampoco con una menor.

Por consiguiente, la esfera $\text{AB}\Gamma$ guarda con la esfera ΔEZ una razón triplicada de la que $\text{B}\Gamma$ guarda con EZ . Q. E. D.

LIBRO DECIMOTERCERO

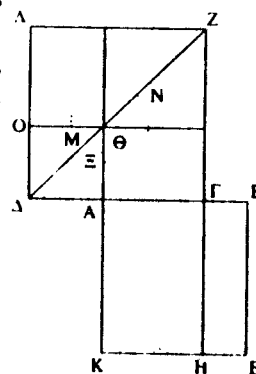
PROPOSICIÓN I

Si se corta una línea recta en extrema y media razón, el cuadrado del segmento mayor junto con el de la mitad de la (recta) entera es cinco veces el cuadrado de la mitad.

Córtese pues la línea recta AB en extrema y media razón por el punto Γ , y sea $\text{A}\Gamma$ el segmento mayor, prolónguese la recta ΔA en línea recta con ΓA y hágase ΔA (igual a) la mitad de AB .

Digo que el cuadrado de ΓA es cinco veces el cuadrado de ΔA .

Pues constrúyanse los cuadrados AE , ΔZ de AB , $\Delta\Gamma$ e inscribese la figura en ΔZ ; prolónguese $\text{Z}\Gamma$ hasta H . Ahora bien, como AB se ha dividido en extrema y media razón por Γ , entonces el (rectángulo comprendido) por AB , $\text{B}\Gamma$ es igual al cuadrado de $\text{A}\Gamma$ [VI Def. 3 y VI 17]. Y el (rectángulo comprendido) por AB , $\text{B}\Gamma$ es ΓE , mientras que el (cuadrado) de $\text{A}\Gamma$ es $\text{Z}\Theta$; entonces, ΓE es igual a $\text{Z}\Theta$. Y como BA es el doble de ΔA , mientras que BA es igual a KA y ΔA a $\text{A}\Theta$, entonces KA también



es el doble de $A\Theta$. Pero, como KA es a $A\Theta$, así ΓK a $\Gamma\Theta$ [VI 1]; luego ΓK es el doble de $\Gamma\Theta$. Pero también $A\Theta$, $\Theta\Gamma$ son el doble de $\Gamma\Theta$. Entonces $K\Gamma$ es igual a $A\Theta$, $\Theta\Gamma$. Pero se ha demostrado que ΓE también es igual a ΘZ ; luego el cuadrado entero AE es igual al gnomon [II Def. 2] MNE . Y como BA es el doble de AA , el cuadrado de BA es el cuádruple del cuadrado de AA , es decir, AE (el cuádruple) de $A\Theta$. Pero AE es igual al gnomon [II Def. 2] MNE ; entonces el gnomon MNE es el cuádruple de AO ; luego el (cuadrado) entero ΔZ es cinco veces AO . Ahora bien, ΔZ es el cuadrado de $\Delta\Gamma$, mientras que AO es el cuadrado de ΔA ; por tanto, el cuadrado de $\Gamma\Delta$ es cinco veces el cuadrado de ΔA .

Por consiguiente, si se corta una recta en extrema y media razón, el cuadrado del segmento mayor junto con el de la mitad de la (recta) entera es cinco veces el cuadrado de la mitad. Q. E. D. ⁷⁰.

⁷⁰ Las cinco primeras proposiciones de este libro tienen más bien el carácter de lemas requeridos para pruebas posteriores. Es probable que procedan de Eudoxo, pues PROCLUS (pág. 67, 6) dice que Eudoxo «incrementó considerablemente el número de teoremas referidos a la sección a partir de Platón». Es de suponer que se trate de la sección áurea.

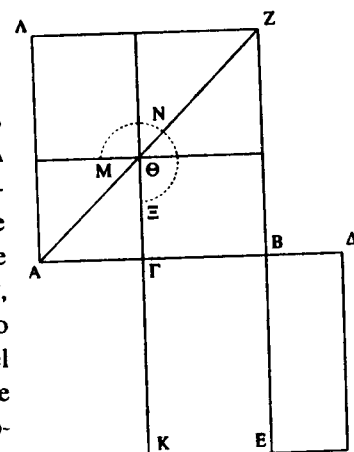
Los mss. contienen una curiosa adición a XIII 1-5 que ofrece *análisis* y *síntesis* de cada una de estas proposiciones. Se trata de un apéndice titulado «¿Qué es análisis y qué es síntesis?» y prosigue: «*Análisis* es la asunción de lo buscado como si ya fuera admitido (y el acceso) por medio de sus implicaciones a algo que se reconoce verdadero. *Síntesis* es una asunción de lo que es reconocido (y el acceso) por medio de sus implicaciones a algo que se admite como verdadero [o, según B y V, a la consecución de lo buscado]». Puede que la matemática griega no haya legado a la posteridad dos nociones metodológicas más sugerentes y más problemáticas que éstas. Los problemas ya nacen de los textos mismos: hay tres versiones clásicas del proceder por análisis y síntesis, a saber: la presente interpolación en los *Elementos*, la glosa de PAPPO (*Synagōgē*, VII 634-636, mucho más extensa) y una breve referencia existente en un comentario de Herón a los *Elementos* II transmitido por al-Nayrizi; todas ellas se prestan a equívocos. Los problemas siguen en los diversos planos en que pueden entenderse ambos procedimientos complementarios y guardan

PROPOSICIÓN 2
[II 11] Si el cuadrado de una línea recta es cinco veces el de un segmento de ella, cuando se corta el doble de dicho segmento en extrema y media razón, el segmento mayor es la parte restante de la recta inicial.

Sea, pues, el cuadrado de la línea recta AB cinco veces el de su segmento $A\Gamma$, y sea $\Gamma\Delta$ el doble de $A\Gamma$.

Digo que si se corta $\Gamma\Delta$ en extrema y media razón, el segmento mayor es ΓB .

Pues constrúyanse los cuadrados AZ , ΓH de AB , $\Gamma\Delta$ respectivamente, e inscribáse la figura en AZ ; trácese BE . Y como el cuadrado de BA es cinco veces el de $A\Gamma$, el cuadrado de AZ es cinco veces el de $A\Theta$. Entonces el gnomon MNE es el cuádruple de $A\Theta$. Y como $\Delta\Gamma$ es el doble de ΓA , entonces el cuadrado de $\Delta\Gamma$ es el cuádruple del cuadrado de ΓA , es decir ΓH el (cuádruple) de $A\Theta$. Pero se ha demostrado que el gnomon MNE



relación con el sentido de uno y otro proceder en cada plano. Cabe entender que se mueven en el plano de las técnicas de resolución de problemas geométricos y, entonces, dirían relación a dos vías solidarias de invención y de confirmación de la solución buscada, aparte de hacer referencia a otras nociones como la de *diorismós*. Cabe entender que se mueven en el plano de la prueba de teoremas o proposiciones y, entonces, dirían relación a dos procesos de inferencia: uno parte de la proposición objeto de la prueba, como si se tratara de

también es el cuádruple de $\Lambda\Theta$; luego el gnomon MNE es igual a ΓH . Y como $\Delta\Gamma$ es el doble de ΓA , mientras que $\Delta\Gamma$ es igual a ΓK , y $\Lambda\Gamma$ a $\Gamma\Theta$, entonces KB es también el doble de $B\Theta$ [VI 1]. Pero $\Lambda\Theta$, ΘB son el doble de ΘB ; luego KB es igual a $\Lambda\Theta$, ΘB . Pero se ha demostrado que el gnomon entero MNE es igual al (cuadrado) entero ΓH ; entonces el resto ΘZ es igual a BH . Y BH es el (rectángulo comprendido) por ΓA , ΔB , porque ΓA es igual a ΔH ; pero ΘZ es el cuadrado de ΓB ; luego el (rectángulo comprendido) por ΓA , ΔB es igual al cuadrado de ΓB . Por tanto, como $\Delta\Gamma$ es a ΓB , así ΓB a BA . Ahora bien, $\Delta\Gamma$ es mayor que ΓB , entonces también ΓB es mayor que BA . Luego, cuando se corta

una asunción táctica o provisional, y se dirige, mediante el análisis de sus presuposiciones, hacia unos supuestos básicos o unos principios congruentes; la síntesis, a su vez, toma pie en estos principios para establecer en un proceso normal de deducción de consecuencias la proposición en cuestión como un teorema. No faltan, en cualquier caso, nuevos problemas bien de orden lógico —ya advertidos por Aristóteles (e. g. en *Analíticos Segundos* 78a7-13)—, bien de orden metodológico. Es probable que ambas nociones pasaran de una aplicación inicial en el ámbito de la resolución de problemas a una proyección posterior en el ámbito de las proposiciones gobernadas por principios y definiciones, aunque nunca perdieran su capacidad heurística y sus usos resolutorios a juzgar por testimonios como el de Pappo. Puede verse un sucinto panorama de estas cuestiones y de su proyección sobre discusiones actuales en lógica y en filosofía de las matemáticas, en L. VEGA, *La trama de la demostración*, págs. 90-92. Para colmo, la historia posterior de este legado matemático griego se ha complicado con nuevas confusiones: por ejemplo, las ideas sobre el análisis y la síntesis se reciben en el Occidente medieval de los ss. XIII-XV entremezcladas con otros procedimientos un tanto análogos de investigación e explicación causal (*resolutio, compositio*), que tienen que ver con la tradición arábigo-galénica mucho más que con la tradición arábigo-euclidiana. Un desenlace de estas y otras aventuras es la multiplicidad de sentidos que las nociones de análisis y de síntesis alcanzan a tener con el desarrollo de la ciencia moderna (e. g. desde su uso en Descartes hasta su uso en Newton), tanto dentro como fuera de las matemáticas. Puede dar una idea al respecto D. OLDROYD, *El arco del conocimiento*, Barcelona, 1993; e. g., págs. 45-51, 60-63, 117-118, 125-129.

la recta ΓA en extrema y media razón, el segmento mayor es ΓB .

Por consiguiente, si el cuadrado de una línea recta es cinco veces el de un segmento de ella, cuando se corta el doble de dicho segmento en extrema y media razón, el segmento mayor es la parte restante de la recta inicial. Q. E. D.

LEMA

Hay que demostrar como sigue que el doble de AF es mayor que BF .

Porque, si no, sea BF , si es posible, el doble de FA ; entonces, el cuadrado de BF es cuatro veces el de FA ; luego los cuadrados de BF , FA son cinco veces el de FA . Pero se ha supuesto que el cuadrado de BA es cinco veces el de FA ; entonces el cuadrado de BA es igual a los (cuadrados) de BF , FA ; lo cual es imposible [II 4]. Por tanto, FB no es el doble de AF . De manera semejante demostraríamos que tampoco una recta menor que ΓB es el doble de ΓA ; porque es todavía más absurdo.

Por consiguiente, el doble de AF es mayor que ΓB . Q. E. D.⁷¹

PROPOSICIÓN 3

Si se corta una línea recta en extrema y media razón, el cuadrado del segmento menor junto con el de la mitad del segmento mayor es cinco veces el cuadrado de la mitad del segmento mayor.

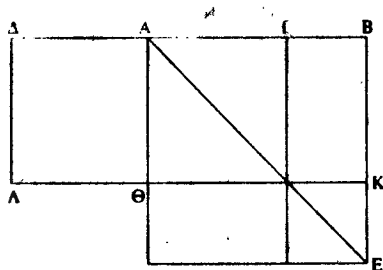
⁷¹ Heiberg duda con razón de la autenticidad del lema y no deja de parecerle insólito o desmesurado el estilo empleado en la alusión a la reducción al absurdo. Dice literalmente: *Dubito an hoc lemma genuinum non sit, neque enim opus est, et dicendi genus lin. 18 paulo insolentius est.*

igual a ΘH ; luego el gnomon ΛMN y los cuadrados ΓK , ΘH son el triple del cuadrado ΘH . Ahora bien, el gnomon ΛMN y los cuadrados ΓK , ΘH son el (cuadrado) entero AE y ΓK , que son precisamente los cuadrados de AB , $B\Gamma$, mientras que $H\Theta$ es el cuadrado de AG . Por tanto, los cuadrados de AB , $B\Gamma$ son el triple del cuadrado de AG . Q. E. D.

PROPOSICIÓN 5

Si se corta una línea recta en extrema y media razón y se le añade (otra) igual al segmento mayor, la recta entera queda cortada en extrema y media razón, y la recta inicial es el segmento mayor.

Córtese, pues, la línea recta AB en extrema y media razón por el punto Γ ; sea AG el segmento mayor y (hágase) AD igual a AG .



Digo que la recta AB se ha cortado en extrema y media razón por el punto A , y que la recta inicial, AB , es el segmento mayor.

Pues constrúyase el cuadrado AE de AB , e inscribáse la figura. Como AB se ha cortado en extrema y media razón por el

punto Γ , entonces el (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ es igual al (cuadrado) de AG [VI Def. 3; VI 17]. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por AB , $B\Gamma$ es ΓE , mientras que el cuadrado de AG es $\Gamma\Theta$; entonces ΓE es igual a $\Gamma\Theta$. Pero ΘE es igual a ΓE , y $\Delta\Theta$ a $\Theta\Gamma$; entonces, $\Delta\Theta$ es igual a ΘE . Luego el (área) entera ΔK es igual al (área) entera AE . Y ΔK es el (rectángulo comprendido) por $B\Delta$, ΔA , porque $\Delta\Delta$ es igual a ΔA ; mientras que AE es el (cuadrado) de AB ; luego el (rectángulo comprendido) por $B\Delta$, ΔA es igual al (cuadrado) de AB . Entonces, como ΔB es a BA , así BA a ΔA [VI 17]. Pero ΔB es mayor que BA ; luego BA es también mayor que ΔA [VI 14].

Por consiguiente, se ha cortado ΔB en extrema y media razón por el (punto) A , y AB es el segmento mayor. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 6⁷²

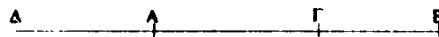
Si una recta expresable se corta en extrema y media razón, cada uno de los segmentos es la (recta) sin razón expresable llamada apótoma.

Sea AB la recta expresable y córtese en extrema y media razón por el punto Γ , y sea AG el segmento mayor.

⁷² Esta proposición parece interpolada. P cuenta con ella, pero el copista dice que «este teorema no se encuentra en la mayoría de las copias de nueva recensión, si bien se halla en las copias de la antigua». En primer lugar, hay un escolio a XIII 17 que prueba lo mismo que XIII 6 y que no tendría sentido si XIII 6 lo hubiera precedido. De ahí se infiere que, cuando el escolio fue escrito, esta proposición no se habría interpolado todavía. Por otra parte, P tiene esta proposición antes de la prueba alternativa de XIII 5; esta prueba se considera interpolada y parece que XIII 6 debe ser una interpolación posterior que la separa de la proposición a que pertenecía. Por último, existen razones para sospechar de la propia proposición porque, mientras el enunciado establece

Digo que cada una de las (rectas) AF , FB es la (recta) sin razón expresable llamada apótoma.

Prolónguese, pues, BA y hágase ΔA (igual) a la mitad de BA . Pues bien, como la recta AB se ha cortado en extrema y



media razón por el punto Γ y se ha añadido al segmento mayor $A\Gamma$ la (recta) ΔA que es la mitad de AB , entonces el cuadrado de ΓA es cinco veces el de ΔA [XIII 1]. Luego el (cuadrado) de ΓA guarda con el (cuadrado) de ΔA la razón que un número guarda con un número; por tanto el (cuadrado) de ΓA es conmensurable con el (cuadrado) de ΔA [X 6]. Pero el (cuadrado) de ΔA es expresable, porque ΔA es expresable, siendo la mitad de AB que es expresable; entonces el cuadrado de ΓA es expresable [X Def. 4]. Luego ΓA también es expresable. Ahora bien, como el (cuadrado) de ΓA no guarda con el cuadrado de ΔA la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, entonces ΓA es inconmensurable en longitud con ΔA [X 9]; luego ΓA , ΔA son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado; por tanto, $A\Gamma$ es una apótoma [X 73]. A su vez, como AB se ha cortado en extrema y media razón y su segmento mayor es $A\Gamma$, entonces el (rectángulo comprendido) por AB , BF es igual al cuadrado de $A\Gamma$ [VI Def. 3, VI 17]. Luego el cuadrado de la apótoma $A\Gamma$, aplicado a la (recta) expresable AB , produce la anchura BF ; pero el cuadrado de una apótoma, aplicado a una

que cada segmento de recta es una apótoma, la proposición añade que el segmento menor es una primera apótoma, punto que no está presente en el escolio en p. Lo que realmente se requiere en XIII 17 es que el segmento mayor sea una apótoma. Es probable que Euclides asumiera que este hecho resultaba bastante claro a partir de XIII 1, y que ni escribiera XIII 6 ni la referencia a su enunciado en XIII 17.

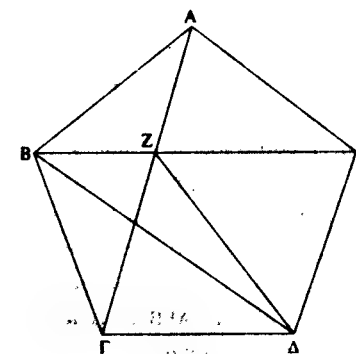
(recta) expresable, produce como anchura una primera apótoma [X 97]; por tanto FB es una primera apótoma. Pero se ha demostrado que FA es también una apótoma.

Por consiguiente, si una recta expresable se corta en extrema y media razón, cada uno de los segmentos es la (recta) sin razón expresable llamada apótoma.

PROPOSICIÓN 7

Si tres ángulos de un pentágono equilátero, sean sucesivos o no, son iguales, el pentágono será equiangular.

Sean, pues, en primer lugar, iguales entre sí, los tres ángulos sucesivos correspondientes a A , B , Γ , del pentágono equilátero $AB\Gamma\Delta E$.



Digo que el pentágono $AB\Gamma\Delta E$ es equiangular.

Pues trácense $A\Gamma$, BE , $Z\Delta$. Y como los dos (lados) ΓB , BA son iguales respectivamente a BA , AE , y el ángulo ΓBA es igual al ángulo BAE , entonces, la base $A\Gamma$ es igual a la base BE , y el triángulo $\Delta B\Gamma$ es igual al triángulo ΔBE y los ángulos restantes,

aquellos a los que subtienden los lados iguales, serán también iguales respectivamente [I 4], es decir: el (ángulo) $B\Gamma A$ al (ángulo) BEA , y el (ángulo) ABE al (ángulo) ΓAB ; de modo que el lado AZ es también igual al lado BZ [I 6]. Pero se ha demostrado que la (recta) entera $A\Gamma$ es también igual a la (recta) entera BE ; luego la (parte) restante $Z\Gamma$ es igual a la (parte) restante ZE . Pero $\Gamma\Delta$ también es igual a ΔE . Entonces los dos (lados) $Z\Gamma$, $\Gamma\Delta$ son iguales a los dos (lados) ZE , $E\Delta$; y su base $Z\Delta$ es común; entonces el ángulo $Z\Gamma\Delta$ es igual al (ángulo) $ZE\Delta$ [I 8]. Pero se ha demostrado que también el (ángulo) $B\Gamma A$ es igual al (ángulo) AEB ; entonces el ángulo entero $B\Gamma\Delta$ es igual al ángulo entero $AEB\Delta$. Ahora bien, se ha supuesto que el (ángulo) $B\Gamma A$ es igual a los ángulos correspondientes A , B . De manera semejante demostraríamos que el ángulo $\Gamma\Delta E$ es también igual a los ángulos correspondientes a A , B , Γ . Por tanto, el pentágono $AB\Gamma\Delta E$ es equiangular.

Pero ahora no sean iguales los ángulos sucesivos, sino que sean iguales los correspondientes a los puntos A , Γ , Δ .

Digo que también en este caso el pentágono $AB\Gamma\Delta E$ es equiangular.

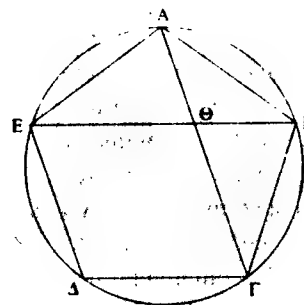
Trácese, pues, $B\Delta$. Y como los dos (lados) BA , AE son iguales a los dos (lados) $B\Gamma$, ΓE comprenden ángulos iguales, entonces la base BE es igual a la base $B\Delta$, y el triángulo ABE es igual al triángulo $B\Gamma\Delta$, y los ángulos restantes, aquellos a los que subtienden ángulos iguales, serán también iguales respectivamente [I 4]. Luego el ángulo AEB es igual al ángulo $\Gamma\Delta B$. Pero el ángulo $BE\Delta$ es también igual al ángulo $B\Delta E$, porque el lado BE es también igual al lado $B\Delta$ [I 4]. Entonces, el ángulo entero $AEB\Delta$ es igual al ángulo entero $\Gamma\Delta E$. Pero se ha supuesto que el ángulo $\Gamma\Delta E$ es igual a los ángulos A , Γ ; luego el ángulo $AEB\Delta$ es igual a los correspondientes a A , Γ . Por lo mismo el ángulo $AB\Gamma$ es también igual a los ángulos correspondientes a A ,

Γ , Δ . Por consiguiente, el pentágono $AB\Gamma\Delta E$ es equiangular. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 8

Si en un pentágono equilátero y equiangular, unas rectas subtienden dos ángulos sucesivos, se cortan entre sí en extrema y media razón y sus segmentos mayores son iguales al lado del pentágono.

Subtiendan las rectas $A\Gamma$, BE que se cortan en el punto Θ a los dos ángulos sucesivos correspondientes a A , B del pentágono equilátero y equiangular $AB\Gamma\Delta E$.



Digo que cada una de ellas queda cortada en extrema y media razón por el punto Θ , y que sus segmentos mayores son iguales al lado del pentágono.

Circunscribase, pues, en torno al pentágono $AB\Gamma\Delta E$, el círculo $AB\Gamma\Delta E$. Y como las dos rectas EA , AB son iguales a las dos (rectas) AB , $B\Gamma$ y comprenden ángulos iguales, entonces, la base BE es igual a la base $A\Gamma$, y el triángulo ABE es igual al triángulo $AB\Gamma$ y los ángulos restantes, aquellos a los que subtienden los la-

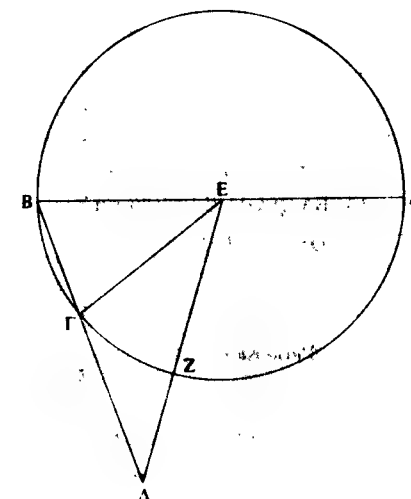
dos iguales, serán también iguales respectivamente [I 4]. Entonces el ángulo $\text{BA}\Gamma$ es igual al ángulo ABE ; luego el (ángulo) $\text{A}\Theta\text{E}$ es el doble del (ángulo) $\text{BA}\Gamma$, porque la circunferencia $\text{EA}\Gamma$ es también el doble de la (circunferencia) ΓB [III 28, VI 33]; entonces el ángulo ΘAF es igual al (ángulo) $\text{A}\Theta\text{E}$; de modo que también la recta ΘE es igual a la (recta) EA , es decir, es igual a la recta AB [I 6]. Y como la recta BA es igual a la (recta) AE , también el ángulo ABE es igual al (ángulo) AEB [I 5]. Pero se ha demostrado que el ángulo ABE es igual al ángulo $\text{BA}\Theta$; luego el (ángulo) BEA también es igual al (ángulo) $\text{BA}\Theta$. Y el ángulo ABE es común a los dos triángulos ABE y $\text{AB}\Theta$; entonces el ángulo restante BAE es igual al (ángulo) restante $\text{A}\Theta\text{B}$ [I 32]; luego el triángulo ABE tiene sus ángulos iguales a los del (triángulo) $\text{AB}\Theta$; por tanto, proporcionalmente, como EB es a BA , así AB a $\text{B}\Theta$ [VI 4]. Pero BA es igual a $\text{E}\Theta$; entonces, como BE es a $\text{E}\Theta$, así $\text{E}\Theta$ a ΘB . Pero BE es mayor que $\text{E}\Theta$; luego $\text{E}\Theta$ es mayor que ΘB [V 14]. Por tanto, BE queda cortada en extrema y media razón por el punto Θ , y su segmento mayor ΘE es igual al lado del pentágono. De manera semejante demostraríamos que $\text{A}\Gamma$ también queda cortada en extrema y media razón por el punto Θ , y que su segmento mayor $\Gamma\Theta$ es igual al lado del pentágono. Q. E. D.

PROPOSICION 9

Si se unen el lado de un hexágono y el de un decágono inscritos en el mismo círculo, la recta entera queda cortada en extrema y media razón, y su segmento mayor es el lado del hexágono.

Sea $\text{AB}\Gamma$ el círculo y, de las figuras inscritas en el círculo $\text{AB}\Gamma$, sea $\text{B}\Gamma$ el lado del decágono y $\Gamma\Delta$ el del hexágono, y estén en línea recta.

Digo que la recta entera $\text{B}\Delta$ queda cortada en extrema y media razón y que su segmento mayor es el lado del hexágono.



Tómese, pues, el punto E como centro del círculo, y trácense EB , $\text{E}\Gamma$, EA , y prolongúese BE hasta A . Como $\text{B}\Gamma$ es el lado del decágono equilátero, entonces la circunferencia $\text{A}\Gamma\text{B}$ es cinco veces la circunferencia $\text{B}\Gamma$; luego la circunferencia $\text{A}\Gamma$ es el cuádruple de ΓB . Pero, como la circunferencia $\text{A}\Gamma$ es a la circunferencia ΓB , así el ángulo $\text{AE}\Gamma$ al (ángulo) ΓEB [VI 33]; entonces el (ángulo) $\text{AE}\Gamma$ es el cuádruple del ángulo ΓEB . Y como el ángulo $\text{EB}\Gamma$ es igual al (ángulo) $\text{E}\Gamma\text{B}$ [I 5], entonces el ángulo $\text{AE}\Gamma$ es el doble del (ángulo) $\text{E}\Gamma\text{B}$ [I 32]. Y como la recta $\text{E}\Gamma$ es igual a la (recta) $\Gamma\Delta$, porque cada una de ellas es igual al lado del hexágono inscrito en el círculo $\text{AB}\Gamma$ [IV 15 Por.], el ángulo $\Gamma\text{E}\Delta$ es también igual al ángulo $\Gamma\Delta\text{E}$ [I 5]; entonces el ángulo $\text{E}\Gamma\text{B}$ es el doble del (ángulo) $\text{E}\Delta\Gamma$ [I 32]. Pero se ha demostrado que el (ángulo) $\text{E}\Gamma\text{B}$ es el doble del (ángulo) $\text{AE}\Gamma$; luego el (ángulo) $\text{AE}\Gamma$ es el cuádruple del (ángulo) $\text{E}\Delta\Gamma$. Pero se ha de-

[I 32]. Luego el triángulo $\Lambda\Gamma\Lambda$ es de ángulos iguales a los del triángulo ΛMZ ; por tanto, proporcionalmente, como $\Lambda\Gamma$ es a $\Gamma\Lambda$, así MZ a ZA ; y (tomando) los dobles de los antecedentes, como el doble de $\Lambda\Gamma$ es a $\Gamma\Lambda$, así el doble de MZ a ZA . Pero como el doble de MZ es a ZA , así MZ a la mitad de ZA ; entonces también, como el doble de $\Lambda\Gamma$ es a $\Gamma\Lambda$, así MZ a la mitad de ZA . Y (tomando) la mitad de los consecuentes, como el doble de $\Lambda\Gamma$ es a la mitad de $\Gamma\Lambda$, así MZ a la cuarta parte de ZA . Ahora bien, el doble de $\Lambda\Gamma$ es $\Delta\Gamma$; la mitad de $\Gamma\Lambda$, ΓM ; y la cuarta parte de ZA , ZK ; entonces, como $\Delta\Gamma$ es a ΓM , así MZ a ZK . Y, por composición, como la suma de $\Delta\Gamma$ y ΓM es a ΓM , así MK a KZ [V 18]; luego, como $\Delta\Gamma$ es a ΓM , así $\Delta\Gamma$ es al cuadrado de ΓM , así el cuadrado de MK al cuadrado de KZ . Y puesto que, si se corta en extrema y media razón la recta que subtiende dos lados del pentágono, como $\Lambda\Gamma$, el segmento mayor es igual al lado del pentágono, es decir, $\Delta\Gamma$ [XIII 8], mientras que el cuadrado del segmento mayor añadido a la mitad de la (recta) entera es igual al cuadrado de la (recta) entera [XIII 1], y ΓM es la mitad de la recta entera $\Lambda\Gamma$, entonces, el cuadrado de $\Delta\Gamma M$, (tomada) como una recta, es cinco veces el cuadrado de ΓM . Pero se ha demostrado que, como el cuadrado de $\Delta\Gamma M$, tomada como una recta, es al cuadrado de ΓM , así el cuadrado de MK al de KZ . Entonces, el cuadrado de MK es cinco veces el cuadrado de KZ . Pero el cuadrado de KZ es expresable, porque el diámetro es expresable; luego el cuadrado de MK es expresable. Por tanto MK es expresable. Y como MK es el cuádruple de ZK , entonces ZK es expresable. Luego el cuadrado de BK es veinticinco veces el cuadrado de KZ . Pero el cuadrado de MK es cinco veces el cuadrado de KZ . Entonces, el cuadrado de BK es cinco veces el cuadrado de KM . Luego el cuadrado de BK no guarda con el cuadrado de KM la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; por tanto BK es inconmensurable en longitud con KM [X 9]. Y cada una de ellas es expresable;

así pues, BK , KM son (rectas) expresables conmensurables sólo en cuadrado. Pero si se quita de una recta expresable otra recta expresable conmensurable sólo en cuadrado con la (recta) entera, la (recta) restante, sin razón expresable, es una apótoma; por tanto MB es una apótoma y MK la adjunta a ella [X 73].

Digo ahora que además MB es la cuarta (apótoma). Sea el cuadrado de N igual a aquello en lo que el (cuadrado) de BK es mayor que el (cuadrado) de KM ; entonces el cuadrado de BK es mayor que el cuadrado de KM en el cuadrado de N . Ahora bien, como KZ es conmensurable con ZB , también, por composición, KB es conmensurable con ZB [X 15]. Pero BZ es conmensurable con $B\Theta$; luego BK también es conmensurable con $B\Theta$ [X 12]. Y como el cuadrado de BK es cinco veces el cuadrado de KM , entonces el cuadrado de BK guarda con el cuadrado de KM la razón que 5 guarda con 1⁷³. Entonces, por conversión, el cuadrado de BK guarda con el cuadrado de N la razón que 5 guarda con 4 [V 19 Por.]. no la que un (número) cuadrado guarda con un (número) cuadrado; entonces BK es inconmensurable con N [X 9]; luego el cuadrado de BK es mayor que el cuadrado de KM en el cuadrado de una (recta) inconmensurable con ella (BK); y puesto que el cuadrado de la (recta) entera BK es mayor que el cuadrado de la adjunta, KM , en el cuadrado de (una recta) inconmensurable con ella (BK), y la recta entera, BK , es conmensurable con la recta expresable propuesta, $B\Theta$, entonces MB es una cuarta apótoma [X Ter. Def. 4]. Pero el rectángulo comprendido por una recta expresable y una cuarta apótoma no tiene razón expresable y el lado del cuadrado no tiene razón expresable y se llama «menor» [X 94]. Pero el cuadrado de AB es igual al rectángulo ΘB , BM , porque, si se traza $A\Theta$, el triángulo $AB\Theta$ es de ángulos iguales a los del (triángulo) ABM y como ΘB es a BA , así AB a BM .

⁷³ Números en el original.

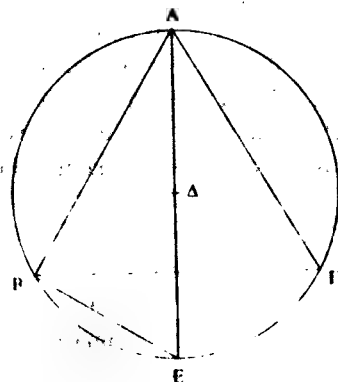
Por consiguiente, el lado AB del pentágono es la (recta) sin razón expresable llamada menor. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 12

Si se inscribe un triángulo equilátero en un círculo, el cuadrado del lado del triángulo es el triple del (cuadrado) del radio del círculo.

Sea ABΓ el círculo e inscribase en él el triángulo equilátero ABΓ.

Digo que el cuadrado de un lado del triángulo ABΓ es el triple del (cuadrado) del radio del círculo ABΓ.



Tómese, pues, Δ como centro del círculo ABΓ, y, una vez trazada ΔA prolonguense hasta E y trácese BE. Ahora bien, como ABΓ es un triángulo equilátero, entonces la circunferencia BEΓ es la tercera parte de la circunferencia del círculo ABΓ. Luego la circunferencia BE es la sexta parte de la circunferencia del círculo. Por tanto, la recta BE es (el lado) de un hexágono; así

pues, es igual al radio ΔE [VI 15 Por.]. Y como AE es el doble de ΔE, el cuadrado de AE es el cuádruple del de ΔA, es decir del de BE. Pero el cuadrado de AE es igual a los cuadrados de AB, BE [III 31, I 47] entonces los cuadrados de AB, BE son el cuádruple del (cuadrado) de BE. Luego, por separación, el (cuadrado) de AB es el triple del de BE. Pero BE es igual a ΔE; por tanto, el cuadrado de AB es el triple del de ΔE.

Por consiguiente, el cuadrado del lado del triángulo es el triple del (cuadrado) del radio [del círculo]. Q. E. D.

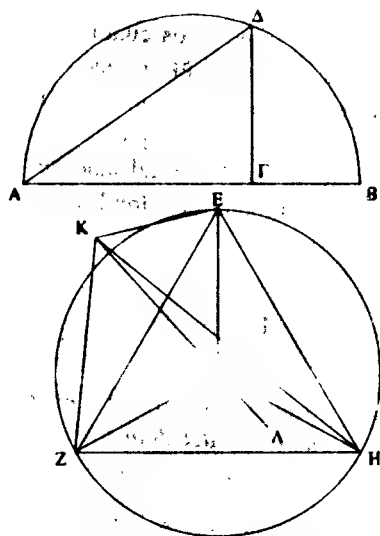
PROPOSICIÓN 13

Construir una pirámide, envolverla⁷⁴ en una esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide.

Póngase AB como diámetro de la esfera dada y córtese por el punto Γ, de modo que AΓ sea el doble de ΓB; describese sobre AB el semicírculo AΔB; trácese ΓΔ formando ángulos rectos con AB desde el punto Γ, y trácese ΔA; póngase el círculo EZH que tenga el radio igual a ΔΓ e inscribese en el círculo EZH el triángulo equilátero EZH [IV 2]; tómese el punto Θ como centro del círculo [III 1]; trácense EΘ, ΘZ, ΘH; desde el punto Θ levántese ΘK formando ángulos rectos con el plano del círculo EZH [XI 12] y quítese de ΘK la (recta) ΘK igual a AΓ, y trácense KE, KZ, KH; ahora bien, como KΘ forma ángulos rectos con el plano del círculo EZH, formará también ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en el plano del círculo EZH [XI Def. 3]. Pero cada una de las rectas ΘE, ΘZ, ΘH la toca:

⁷⁴ Traduzco *perilambánō* por «envolver» para distinguirlo de *engráphō* «inscribir» o *perigráphō* «circunscribir»

entonces ΘK forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) ΘE , ΘZ , ΘH . Y como $A\Gamma$ es igual a ΘK y $\Gamma\Delta$ a ΘE , y comprenden



ángulos rectos, entonces la base ΔA es igual a la base KE [I 4]. Y como ΔA es igual a KE , y ΔA es igual a KE , luego las tres (rectas) KE , KZ , KH son iguales entre sí. Y como $A\Gamma$ es el doble de ΓB , entonces AB es el triple de $B\Gamma$. Pero AB es el triple de $B\Gamma$, como el cuadrado de AA al cuadrado de $\Delta\Gamma$ como se demostrará enseguida⁷⁵. Entonces el cuadrado de AA es el triple del cuadrado de $\Delta\Gamma$. Pero el cuadrado de ZE es también el triple del cuadrado de $E\Theta$ [XIII 12], y $\Delta\Gamma$ es igual a $E\Theta$; entonces ΔA es igual a EZ . Ahora bien, se ha demostrado que ΔA es igual a KE , y EZ es igual a KE ; entonces las

⁷⁵ Se refiere al lema que sigue a la proposición, lema cuya autenticidad se pone en duda.

(rectas) EZ , ZH , HE son iguales a las (rectas) KE , KZ , KH respectivamente; luego los cuatro triángulos EZH , KEZ , KZH , KEH son equiláteros. Por tanto, a partir de cuatro triángulos equiláteros, se ha construido una pirámide cuya base es el triángulo EZH y su vértice el punto K .

Ahora hay que envolverla en la esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide.

Prolónguese, pues, la recta $\Theta\Lambda$ en línea recta con $K\Theta$, y hágase $\Theta\Lambda$ igual a ΓB . Y dado que, como $A\Gamma$ es a $\Gamma\Delta$, así $\Gamma\Delta$ a ΓB [VI 8 Por.] mientras que $A\Gamma$ es igual a $K\Theta$, $\Gamma\Delta$ a ΘE y ΓB a $\Theta\Lambda$, entonces como $K\Theta$ es a ΘE , así $E\Theta$ a $\Theta\Lambda$; luego el (rectángulo comprendido) por $K\Theta$, $\Theta\Lambda$ es igual al cuadrado de $E\Theta$ [VI 17]. Y cada uno de los ángulos $K\Theta E$, $E\Theta\Lambda$ es recto; entonces el semicírculo descrito sobre $K\Lambda$ pasará también por el (punto) E [VI 8; III 31]. Entonces, si permaneciendo fija $K\Lambda$, se hace girar el semicírculo y se vuelve a la posición de donde empezó a moverse, pasará también por los puntos Z , H , pues trazadas las rectas $Z\Lambda$, ΛH , los ángulos correspondientes a Z , H resultan parejamente rectos; y la pirámide quedará envuelta en la esfera dada. Porque $K\Lambda$, el diámetro de la esfera, es igual al diámetro AB de la esfera dada, ya que $K\Theta$ se ha hecho igual a $A\Gamma$ y $\Theta\Lambda$ a ΓB .

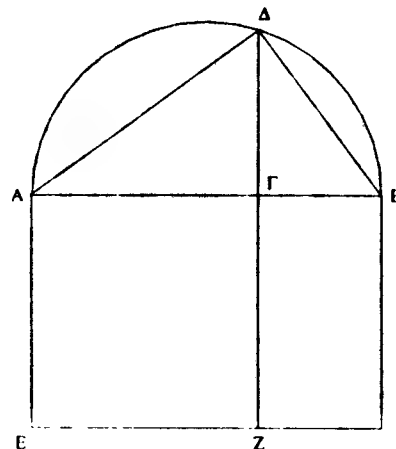
Digo además que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide.

Pues como $A\Gamma$ es el doble de ΓB , entonces AB es el triple de $B\Gamma$; luego, por conversión, BA es una vez y media $A\Gamma$. Pero como BA es a $A\Gamma$, así el cuadrado de BA al de $A\Delta$. Luego el cuadrado de BA es una vez y media el de $A\Delta$. Y BA es el diámetro de la esfera dada y $A\Delta$ es igual al lado de la pirámide.

Por consiguiente, el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide. Q. E. D.

LEMA

Hay que demostrar que, como AB es a BΓ, así el cuadrado de AA al cuadrado de ΓΔ.

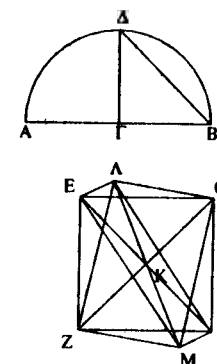


Póngase, pues, la figura del semicírculo, y trácese ΔB; constrúyase sobre AΓ el cuadrado EΓ y complétese el paralelogramo ZB. Pues bien, dado que, por ser el triángulo ΔAB de ángulos iguales a los de ΔAΓ, como BA es a AΔ, así ΔA a AΓ [VI 8; VI 4], entonces el (rectángulo comprendido) por BA, AΓ es igual al (cuadrado) de AΔ [VI 17]. Y dado que, como AB es a BΓ, así EB a BZ [VI 1] y EB es el (rectángulo comprendido) por BA, AΓ —por que EA es igual a AΓ— mientras que BZ es el rectángulo comprendido por AΓ, ΓB, entonces, como AB es a BΓ, así el (rectángulo comprendido) por BA, AΓ al (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por BA, AΓ es igual al cuadrado de AΔ, mientras que el (rectángulo comprendido) por AΓ, ΓB es igual al (cuadrado) de ΔΓ, porque la perpendicular AΓ es la media proporcional de los segmentos AΓ, ΓB de la base por ser recto el ángulo AΔB [VI 8 Por.]. Entonces, como AB es a BΓ, así el cuadrado de AΔ al cuadrado de ΔΓ. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 14

Construir un octaedro y envolverlo en una esfera como en la (proposición) anterior, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del (cuadrado) del lado del octaedro.

Póngase el diámetro AB de la esfera dada y divídase en dos por el punto Γ; describáse sobre AB el semicírculo AΔB, y trácese, desde el punto Γ, ΓΔ formando ángulos rectos con AB; trácese ΔB; póngase el cuadrado EZHΘ que tenga cada uno de sus lados igual a ΔB, y trácense ΘZ, EH; levántese, a partir del punto K, la recta KΛ formando ángulos rectos con el plano del cuadrado EZHΘ [XI 12] y prolongúese hacia el otro lado del plano como KM, y de las (rectas) KΛ, KM quítense respectivamente KΛ, KM iguales a una de las (rectas) EK, ZK, Hκ, ΘK y trácense ΔE,



ΔZ, ΔH, ΔΘ, ME, MZ, MH, MΘ. Como KE es igual a KΘ y el ángulo EKΘ es recto, entonces el (cuadrado) de ΘE es el doble del cuadrado de EK [I 47]. Como, a su vez, ΔK es igual a KE y el ángulo ΔKE es recto, entonces el cuadrado de EA es el doble del cuadrado de EK [id]. Pero se ha demostrado que también el cuadrado de ΘE es el doble del cuadrado de EK; entonces el cuadrado de ΔE es igual al cuadrado de EΘ; luego ΔE es igual a EΘ. Por lo mismo, ΔΘ es también igual a EΘ; por tanto, el triángulo ΔEΘ es equilátero. De manera semejante demostraríamos que cada uno de los triángulos restantes cuyas bases son los lados del cuadrado EZHΘ y sus vértices los puntos Δ, M, son

equiláteros; por tanto, se ha construido un octaedro comprendido por ocho triángulos equiláteros.

Ahora hay que envolverlo en la esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del (cuadrado) del lado del octaedro.

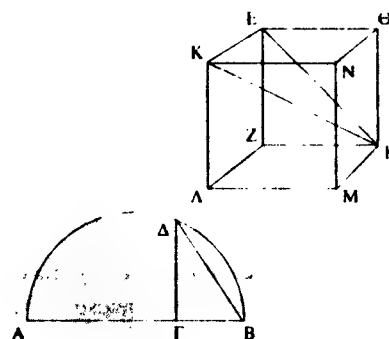
Pues como las tres (rectas) AK , KM , KE son iguales entre sí, entonces el semicírculo descrito sobre AM pasará también por el punto E . Y por lo mismo, si, permaneciendo fija AM , se hace girar el semicírculo y se vuelve a la misma posición desde donde empezó a moverse, pasará también por los puntos Z , H , Θ , y el octaedro quedará envuelto en una esfera. Digo además que también en la esfera dada. Pues como AK es igual a KM y KE es común y comprenden ángulos rectos, entonces, la base AE es igual a la base EM [I 4]. Y como el ángulo AEM es recto, porque está en un semicírculo [III 31], entonces el cuadrado de AM es el doble del cuadrado de AE [I 47]. Como, a su vez, AG es igual a GB , AB es el doble de BG . Pero como AB es a BG , así el cuadrado de AB al cuadrado de BA ; entonces el cuadrado de AB es el doble del cuadrado de BA . Pero se ha demostrado que también el cuadrado de AM es el doble del de AE . Y el cuadrado de AB es igual al cuadrado de AE , porque $E\Theta$ se ha hecho igual a AB . Entonces el cuadrado de AB es igual al cuadrado de AM ; luego AB es igual a AM . Y AB es el diámetro de la esfera dada; por tanto AM es igual al diámetro de la esfera dada.

Por consiguiente, se ha envuelto el octaedro en la esfera dada. Y se ha demostrado al mismo tiempo que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del (cuadrado) del lado del octaedro. Q. E. D.

PROPOSICION 15

Construir un cubo y envolverlo en una esfera como la pirámide, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del (cuadrado) del lado del cubo.

Póngase AB como diámetro de la esfera dada y córtese por el punto Γ de modo que AG sea el doble de GB ; describáse sobre



AB , el semicírculo $A\Gamma B$; desde el punto Γ , trácese $\Gamma\Delta$ formando ángulos rectos con AB , y trácese ΔB ; póngase el cuadrado $EZH\Theta$ que tenga el lado igual a ΔB , y trácense, desde los puntos E , Z , H , Θ las (rectas) EK , $Z\Lambda$, HM , ΘN formando ángulos rectos con el plano del cuadrado $EZH\Theta$; y de EK , $Z\Lambda$, HM , ΘN quítense respectivamente EK , $Z\Lambda$, HM , ΘN iguales a una de las (rectas) EZ , ZH , $H\Theta$, ΘE , y trácense $K\Lambda$, ΛM , MN , NK ; entonces se ha construido el cubo ZN comprendido por seis cuadrados iguales. Ahora hay que envolverlo en la esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del (cuadrado) del lado del cubo.

Trácense, pues, KH , EH . Y como el ángulo KEH es recto,

porque KE forma ángulos rectos con el plano EH y, evidentemente, también con la recta EH [XI Def. 3], entonces el semicírculo descrito sobre KH pasará por el punto E. Como, a su vez, HZ forma ángulos rectos con cada una de las (rectas) ZA, ZE, entonces HZ forma ángulos rectos también con el plano ZK; de modo que, si trazamos la (recta) ZK, HZ formará también ángulos rectos con la (recta) ZK; y por eso, el semicírculo descrito sobre HK pasará a su vez por el (punto) Z. De manera semejante, pasará también por los puntos (angulares) restantes del cubo. Entonces, si, permaneciendo fija KH, se hace girar el semicírculo y se vuelve al mismo lugar de donde empezó a moverse, el cubo quedará envuelto en la esfera.

Digo además que en la esfera dada.

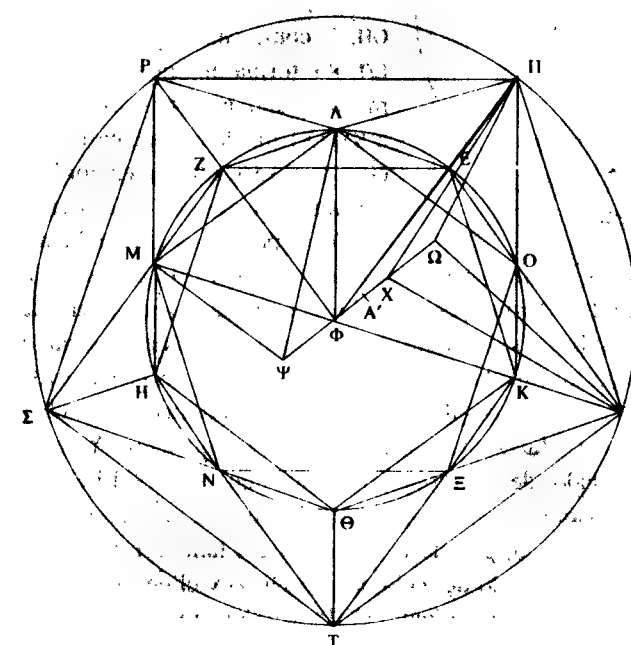
Pues como HZ es igual a ZE y el ángulo correspondiente a Z es recto, entonces el cuadrado de EH es el doble del de EZ. Pero EZ es igual a EK; entonces el cuadrado de EH es el doble del cuadrado de EK; de modo que los cuadrados de HE, EK, es decir, el cuadrado de HK [I 47], son el triple del cuadrado de EK. Y como AB es el triple de BΓ, mientras que, como AB es a BΓ, así el cuadrado de AB al cuadrado de BΔ, entonces el cuadrado de AB es el triple del cuadrado de BΔ. Pero se ha demostrado que también el cuadrado de HK es el triple del cuadrado de KE. Y KE se ha hecho igual a ΔB; luego KH es también igual a AB. Y AB es el diámetro de la esfera dada; por tanto, KH es igual al diámetro de la esfera dada.

Por consiguiente, el cubo ha quedado envuelto en la esfera dada y se ha demostrado, al mismo tiempo, que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del (cuadrado) del lado del cubo. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 16

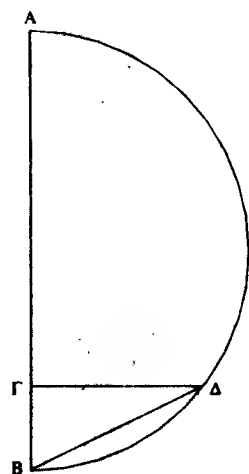
Construir un icosaedro y envolverlo en una esfera, como en las figuras antedichas, y demostrar que el lado del icosaedro es la (recta) sin razón expresable llamada «menor».

Póngase AB como diámetro de la esfera dada [véase la figura de la pág. 344] y córtese por el punto Γ de modo que AΓ sea el cuádruple de ΓB; describese sobre AB el semicírculo AAB; trá-



cese desde Γ la línea recta ΓΔ que forme ángulos rectos con AB, y trácese ΔB; póngase el círculo EZHΘK, cuyo radio sea igual a ΔB, e inscribese en el círculo EZHΘK el pentágono equilátero y

equiangular EZHΘK; divídanse en dos partes iguales las circunferencias EZ, ZH, HΘ, ΘK, KE por los puntos Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, y trácense ΛΜ, ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, ΕΟ. Entonces, el pentágono ΛΜΝΞΟ



es también equilátero, y la recta ΕΟ es (el lado) de un decágono. Y desde los puntos Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, levántense las rectas ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ que formen ángulos rectos con el plano del círculo y sean iguales al radio del círculo EZHΘK; trácense ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΛ, ΛΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ, ΟΠ. Y como cada una de las (rectas) ΕΠ, ΚΥ forma ángulos rectos con el mismo plano, entonces ΕΠ es paralela a ΚΥ [XI 6]. Pero también es igual a ella. Y las rectas que unen por los (extremos) del mismo lado a (rectas) iguales y paralelas, son también ellas

mismas iguales y paralelas [I 33]. Entonces ΠΥ es igual y paralela a ΕΚ. Pero ΕΚ es (un lado) del pentágono equilátero; luego ΠΥ también es (un lado) del pentágono equilátero inscrito en el círculo EZHΘK. Por lo mismo, cada una de las (rectas) ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ es (un lado) del pentágono equilátero inscrito en el círculo EZHΘK; luego el pentágono ΠΡΣΤΥ es equilátero. Y como ΠΕ es (el lado) de un hexágono mientras que ΕΟ es (el lado) de un decágono, y el ángulo ΠΕΟ es recto, entonces ΠΟ es (el lado) de un pentágono, porque el cuadrado del lado del pentágono es igual al cuadrado del lado del hexágono y el del decágono inscritos en el mismo círculo [XIII 10]. Por lo mismo, ΟΥ es también un lado del pentágono. Pero ΠΥ es también (un lado) del pentágono; luego el triángulo ΠΟΥ es equilátero. Por lo mismo cada uno de los (triángulos) ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ es equilátero. Y como se ha demostrado que cada una de las (rectas) ΠΛ, ΠΟ es

(un lado) del pentágono, ΛΟ también es (un lado) del pentágono, entonces el triángulo ΠΛΟ es equilátero. Por lo mismo, cada uno de los triángulos ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ es equilátero. Tómese el punto Φ como centro del círculo EZHΘK; y a partir de Φ, levántese ΦΩ formando ángulos rectos con el plano del círculo y prolonguese hacia el otro lado como ΦΨ, y quítese ΦΧ, lado del hexágono, y cada una de las (rectas) ΦΨ, ΧΩ, lados del decágono, y trácense ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΑΨ, ΨΜ. Ahora bien, como cada una de las (rectas) ΦΧ, ΠΕ forma ángulos rectos con el plano del círculo, entonces ΦΧ es paralela a ΠΕ [XI 6]. Pero también son iguales; entonces ΕΦ, ΠΧ también son iguales y paralelas [I 33]; pero ΕΦ es (el lado) de un hexágono; entonces ΠΧ es también (el lado) de un hexágono. Y como ΠΧ es (el lado) de un hexágono y ΧΩ (el) de un decágono y el ángulo ΠΧΩ es recto, entonces ΠΩ es el lado de un pentágono [XIII 10]. Por lo mismo ΥΩ es también el (lado) de un pentágono, porque si trazamos ΦΚ, ΧΥ serán también iguales y opuestas, y ΦΚ, siendo un radio, es (el lado) de un hexágono [IV 15 Por.], entonces ΧΥ es (el lado) de un hexágono. Pero ΧΩ es (el lado) de un decágono, y el ángulo ΥΧΩ es recto, entonces ΥΩ es (el lado) de un pentágono [XIII 10]. Pero ΠΥ también es de un pentágono; luego el triángulo ΠΥΩ es equilátero. Por lo mismo, cada uno de los restantes triángulos cuyas bases son las rectas ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, y su vértice el punto Ω son equiláteros. Y como ΦΛ es a su vez (el lado) de un hexágono y ΦΨ (el) de un decágono y el ángulo ΛΦΨ es recto, entonces ΑΨ es (el lado) de un pentágono [XIII 10]. Por lo mismo, si trazamos ΜΦ que es (el lado) de un hexágono, se sigue que ΜΨ también es el (lado) de un pentágono y ΑΜ también es el (lado) de un pentágono; luego el triángulo ΑΜΨ es equilátero. De manera semejante se demostraría que cada uno de los triángulos restantes cuyas bases son ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ y su vértice el punto Ψ son equiláteros. Por tanto, se ha construido un icosaedro comprendido por veinte triángulos equiláteros.

Ahora hay que envolverlo en la esfera dada y demostrar que el lado del icosaedro es la (recta) sin razón expresable llamada «menor».

Pues como ΦX es (el lado) de un hexágono y $X\Omega$ de un decágono, entonces $\Phi\Omega$ se ha cortado en extrema y media razón por el (punto) X y ΦX es su segmento mayor [XIII 9]; entonces, como $\Omega\Phi$ es a ΦX , así ΦX a $\Phi\Psi$; pero ΦX es igual a ΦE y $X\Omega$ a $\Phi\Psi$; entonces, como $X\Omega$ es a ΦE , así $E\Phi$ a $\Phi\Psi$, y los ángulos $\Omega\Phi E$, $E\Phi\Psi$ son rectos; luego, si trazamos la recta $E\Omega$, el ángulo $\Psi E\Omega$ será recto por la semejanza de los triángulos $\Psi E\Omega$, $\Phi E\Omega$. Por lo mismo, dado que, como $\Omega\Phi$ es a ΦX , así ΦX a $X\Omega$, mientras que $\Omega\Phi$ es igual a ΨX y ΦX a $X\Pi$, entonces, como ΨX es a $X\Pi$, así ΠX a $X\Omega$. Y de nuevo, por la misma razón, si trazamos $\Pi\Psi$, el ángulo correspondiente a Π será recto [VI 8]; luego el semicírculo descrito sobre $\Psi\Omega$ pasará también por Π [III 31]. Y si permaneciendo fija $\Psi\Omega$, se hace girar el semicírculo y se vuelve a la misma posición desde donde empezó a moverse pasará también por Π y los puntos (angulares) restantes del icosaedro; y el icosaedro quedará envuelto en una esfera.

Digo ahora que en la esfera dada.

Divídase, pues, ΦX en dos partes iguales por el punto A' . Y como la línea recta $\Phi\Omega$ ha sido cortada en extrema y media razón por el (punto) X y su segmento menor es ΩX , entonces el cuadrado de ΩX añadido a la mitad del segmento mayor XA' es cinco veces el cuadrado de la mitad del segmento mayor [XIII 3]; entonces el cuadrado de $\Omega A'$ es cinco veces el cuadrado de $A'X$. Ahora bien, $\Omega\Psi$ es el doble de $\Omega A'$ y ΦX el doble de $A'X$; entonces, el cuadrado de $\Omega\Psi$ es cinco veces el cuadrado de $X\Phi$. Y como $A\Gamma$ es el cuádruple de ΓB , entonces AB es cinco veces $B\Gamma$. Pero como AB es a $B\Gamma$, así el cuadrado de AB al cuadrado de $B\Delta$ [VI 8; V Def. 9]; luego el cuadrado de AB es cinco veces el cuadrado de $B\Delta$. Pero se ha demostrado que el cuadrado de $\Omega\Psi$ es cinco veces el cuadrado de ΦX . Y ΔB es igual a ΦX , por-

que cada una de ellas es igual al radio del círculo $EZH\Theta K$; entonces AB es igual a $\Psi\Omega$. Y AB es el diámetro de la esfera dada; luego $\Psi\Omega$ es igual al diámetro de la esfera dada. Por tanto, el icosaedro queda envuelto en la esfera dada.

Digo ahora que el lado del icosaedro es la (recta) sin razón expresable llamada «menor».

Pues como el diámetro de la esfera es expresable y su cuadrado es el quíntuple del radio del círculo $EZH\Theta K$, entonces el radio del círculo $EZH\Theta K$ es expresable, de modo que también su diámetro es expresable. Pero si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo de diámetro expresable, el lado del pentágono es la (recta) sin razón expresable llamada «menor» [XIII 11]. Pero el lado del pentágono es el lado del icosaedro.

Por consiguiente, el lado del icosaedro es la (recta) sin razón expresable llamada «menor».

Porisma:

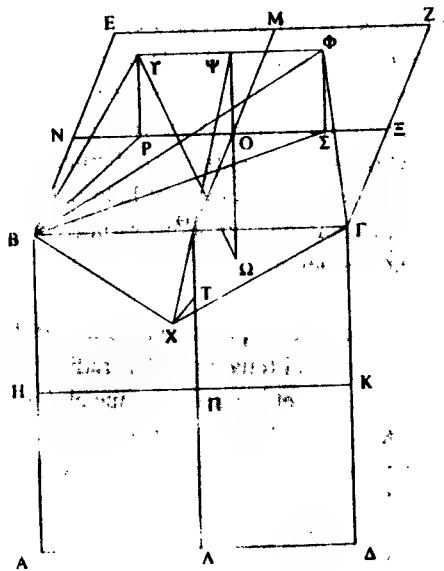
A partir de esto queda claro que el cuadrado del diámetro de la esfera es el quíntuple del (cuadrado del) radio del círculo a partir del cual se ha trazado el icosaedro, y que el diámetro de la esfera está compuesto por el (lado) del hexágono y dos de los (lados) del decágono inscritos en el mismo círculo. Q. E. D.

PROPOSICIÓN 17

Construir un dodecaedro y envolverlo en una esfera como en las figuras antedichas, y demostrar que el lado del dodecaedro es la (recta) sin razón expresable llamada apótoma.

Pónganse los dos planos $AB\Gamma\Delta$, ΓBEZ del cubo antedicho formando ángulos rectos entre sí y divídase en dos partes iguales cada uno de los lados AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA , EZ , EB , $Z\Gamma$ por los puntos H , Θ , K , Λ , M , N , Ξ ; trácense HK , $\Theta\Lambda$, $M\Theta$, $N\Xi$, y córtese

cada una de las (rectas) NO, OE, $\Theta\Pi$ en extrema y media razón por los puntos P, Σ , T, y sean sus segmentos mayores PO, O Σ , T Π ; levántense desde los puntos P, Σ , T, las (rectas) PY, $\Sigma\Phi$, TX formando ángulos rectos con los planos del cubo hacia la parte exterior del cubo, y háganse iguales a PO, O Σ , T Π , y trácense YB, BX, X Γ , $\Gamma\Phi$, ΦY .



Digo que el pentágono YBX $\Gamma\Phi$ es equilátero y está en un plano y además que es equiangular.

Trácense, pues, PB, ΣB , ΦB . Y como la recta NO ha sido cortada en extrema y media razón por el punto P y PO es el segmento mayor de ON, NP son el triple del cuadrado de PO [XIII 4]. Pero ON es igual a NB y OP a PY; entonces, los cuadrados de BN, NP son el triple del cuadrado de PY. Pero el cuadrado de BP es igual a los cuadrados de BN, NP [I 47]; entonces, el cuadrado de BP es el triple del cuadrado de

PY; de modo que los cuadrados de BP, PY son el cuádruple del cuadrado de PY. Pero el cuadrado de BY es igual a los cuadrados de BP, PY; entonces el cuadrado de BY es el cuádruple del cuadrado de PY; luego BY es el doble de PY. Pero ΦY es también el doble de PY, porque ΣP también es (el doble) de OP, es decir de PY. Entonces BY es igual a Y Φ . De manera semejante se demostraría que cada una de las (rectas) BX, X Γ , $\Gamma\Phi$ es igual a cada una de las (rectas) BY, Y Φ . Luego el pentágono BY $\Phi\Gamma X$ es equilátero.

Digo ahora que también está en un plano.

Trácese, pues, desde el punto O, la (recta) O Ψ paralela a cada una de las (rectas) PY, $\Sigma\Phi$ hacia la parte exterior del cubo, y trácense $\Psi\Theta$, ΘX .

Digo que $\Psi\Theta X$ es una recta.

Pues como $\Theta\Pi$ ha sido cortada en extrema y media razón por T, y su segmento mayor es T Π , entonces, como $\Theta\Pi$ es a T Π , así T Π a T Θ . Pero $\Theta\Pi$ es igual a ΘO , y T Π a cada una de las (rectas) TX, O Ψ ; entonces, como ΘO es a O Ψ , así XT a T Θ . Ahora bien, ΘO es paralela a TX, porque cada una de ellas forma ángulos rectos con el plano BA [XI 6]; y T Θ (es paralela) a O Ψ , porque cada una de ellas forma ángulos rectos con el plano BZ [id.]. Pero si dos triángulos como $\Psi\Theta\Theta$, ΘTX , que tienen dos lados (de uno) proporcionales a dos lados (del otro), se construyen unidos por un ángulo de modo que sus lados correspondientes sean paralelos, las restantes rectas estarán en línea recta [VI 32]. Entonces $\Phi\Theta$ estará en línea recta con ΘX . Pero toda recta está en un plano [XI 1]; luego el pentágono YBX $\Gamma\Phi$ está en un plano.

Digo ahora que es equiangular.

Pues como la línea recta NO ha sido cortada en extrema y media razón por el (punto) P, y su segmento mayor es OP, y OP es igual a O Σ , entonces N Σ ha sido cortada en extrema y media razón por el (punto) O, y su segmento mayor es NO [XIII 5];

luego los (cuadrados) de NE , EO son el triple del cuadrado de NO [XIII 4]. Pero NO es igual a NB y OE a $\Sigma\Phi$; entonces los cuadrados de NE , $\Sigma\Phi$ son el triple del cuadrado de NB ; de modo que los cuadrados de $\Phi\Sigma$, ΣN , NB son el cuádruple del cuadrado de NB . Pero el cuadrado de ΣB es igual a los cuadrados de ΣN , NB ; entonces los cuadrados de $B\Sigma$, $\Sigma\Phi$, es decir, el cuadrado de $B\Phi$ (porque el ángulo $\Phi B\Sigma$ es recto), son el cuádruple del cuadrado de NB ; luego ΦB es el doble de BN . Pero $B\Gamma$ es también el doble de BN ; entonces $B\Phi$ es igual a $B\Gamma$. Ahora bien, como las dos rectas BY , $Y\Phi$ son iguales a las dos rectas BX , $X\Gamma$ y la base $B\Phi$ es igual a la base $B\Gamma$, entonces el ángulo $BY\Phi$ es igual al ángulo $BX\Gamma$ [I 8]. De manera semejante demostraríamos que el ángulo $Y\Phi\Gamma$ es igual al ángulo $BX\Gamma$; entonces los tres ángulos $BX\Gamma$, $BY\Phi$, $Y\Phi\Gamma$ son iguales entre sí. Pero si tres ángulos de un pentágono equilátero son iguales entre sí, el pentágono será equiangular [XIII 7]; luego el pentágono $BY\Phi\Gamma X$ es equiangular; y se ha demostrado que también es equilátero; por tanto, el pentágono $BY\Phi\Gamma X$ es equilátero y equiangular y está sobre un lado, $B\Gamma$, del cubo. Por tanto, si seguimos la misma construcción sobre cada uno de los doce lados del cubo, se construirá una figura sólida comprendida por doce pentágonos equiláteros y equiangulares que se llama dodecaedro.

Ahora hay que envolverlo en la esfera dada y demostrar que el lado del dodecaedro es la recta sin razón expresable llamada apótoma.

Prolónguese, pues, ΨO y resulte $\Psi\Omega$; entonces, $O\Omega$ da con el diámetro del cubo y se dividen en dos partes iguales una a otra, porque esto se ha demostrado en el penúltimo teorema del libro XI [XI 38]. Córtese por el punto Ω ; entonces Ω es el centro de la esfera que envuelve el cubo y ΩO es la mitad del lado del cubo. Trácese ahora $Y\Omega$, y como la línea recta NE ha sido cortada en extrema y media razón por el punto O y su segmento mayor es NO , entonces los cuadrados de NE , EO son el triple

del cuadrado de NO [XIII 4]. Pero NE es igual a $\Psi\Omega$, porque también NO es igual a $O\Omega$ y ΨO a $O\Sigma$. Pero también $O\Sigma$ (es igual) a OY , porque también (es igual) a PO ; entonces los cuadrados de $\Omega\P$, ΨY son el triple del cuadrado de NO . Pero el cuadrado de $Y\Omega$ es igual a los cuadrados de $\Omega\P$, ΨY ; entonces el cuadrado de $Y\Omega$ es el triple del cuadrado de NO . Pero el cuadrado del radio de la esfera que envuelve al cubo es también el triple del cuadrado de la mitad del lado del cubo, pues se ha demostrado anteriormente cómo construir un cubo y envolverlo en una esfera y cómo probar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del cuadrado del lado del cubo [XIII 15]. Y si el todo (es el triple) del todo, también la mitad lo es de la mitad; y NO es la mitad del lado del cubo; luego $Y\Omega$ es igual al radio de la esfera que envuelve al cubo. Ahora bien Ω es el centro de la esfera que envuelve al cubo; entonces el punto Y está en la superficie de la esfera. De manera semejante demostraríamos que cada uno de los restantes ángulos del dodecaedro están en la superficie de la esfera; por tanto, el dodecaedro queda envuelto en la esfera dada.

Digo ahora que el lado del dodecaedro es la recta sin razón expresable llamada apótoma.

Pues como, una vez cortada NO en extrema y media razón, PO es su segmento mayor y, una vez cortada $O\Sigma$ en extrema y media razón, $O\Sigma$ es su segmento mayor; entonces, si se corta la recta entera NE en extrema y media razón, su segmento mayor es $P\Sigma$. Puesto que, como NO es a OP , OP a PN , también lo son los dobles, porque las partes guardan la misma razón que sus equimúltiplos [V 15]. Luego, como NE es a $P\Sigma$, así $P\Sigma$ a la suma de NP , ΣE . Pero NE es mayor que $P\Sigma$, entonces $P\Sigma$ es mayor que la suma de NP , ΣE ; entonces NE ha sido cortada en extrema y media razón, y su segmento mayor es $P\Sigma$. Y $P\Sigma$ es igual a $Y\Phi$; luego, si se corta NE en extrema y media razón, el segmento mayor es $Y\Phi$. Y como el diámetro de la esfera es expresable y

MB. Y como el cuadrado de $B\Gamma$ es el quíntuple del cuadrado de ΓK y AB es el doble de $B\Gamma$ y $K\Lambda$ el doble de ΓK , entonces el cuadrado de AB es el quíntuple del cuadrado de $K\Lambda$. Pero también el cuadrado del diámetro de la esfera es el quíntuple del radio del círculo a partir del cual se ha construido el icosaedro [XIII 16 Por.]. Y AB es el diámetro de la esfera; entonces $K\Lambda$ es el radio del círculo a partir del cual se ha construido el icosaedro; luego $K\Lambda$ es un lado del hexágono en el círculo antedicho [IV 15 Por.]. Y como el diámetro de la esfera está compuesto a partir del (lado) del hexágono y dos (lados) de los del decágono inscrito en el círculo antedicho, y AB es el diámetro de la esfera, mientras que $K\Lambda$ es el lado del hexágono y AK es igual a AB , entonces cada una de las (rectas) AK , AB es un lado del decágono inscrito en el círculo a partir del cual se ha construido el icosaedro. Y como AB es un (lado) del decágono y MA del hexágono, porque es igual a $K\Lambda$ y porque es también igual a ΘK —pues están a igual distancia del centro— y cada una de las (rectas) ΘK , $K\Lambda$ es el doble de $K\Gamma$, entonces MB es un lado del pentágono [XIII 10]. Y el lado del pentágono es el del icosaedro [XIII 16]; entonces MB es el lado del icosaedro.

Ahora bien, como ZB es el lado del cubo, córtese en extrema y media razón por el punto N y sea NB el segmento mayor; entonces NB es un lado del dodecaedro [XIII 17 Por.].

Y como se ha demostrado que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado AZ de la pirámide, mientras que es el doble del cuadrado del lado BE del octaedro, y el triple del cuadrado del lado ZB del cubo, entonces el cuadrado del diámetro de la esfera (tiene) seis partes, de las que el (cuadrado del lado) de la pirámide (tiene) cuatro, el del octaedro, tres y el del cubo dos. Luego el cuadrado del lado de la pirámide es cuatro tercios del cuadrado del lado del octaedro y el doble del cuadrado del lado del cubo, y el cuadrado del lado del octaedro es una vez y media el del lado del cubo. Así pues,

los lados de las tres figuras antedichas, digo, de la pirámide, del octaedro y del cubo, guardan entre sí razones expresables. Pero los dos restantes, digo el del icosaedro y el del dodecaedro no guardan razones expresables ni entre sí ni con los antedichos, porque son, una «menor» [XIII 16] y otra, apótoma [XIII 17].

Demostraremos de la siguiente manera que el lado MB del icosaedro es mayor que el (lado) NB del dodecaedro:

Pues como el triángulo ZAB es de ángulos iguales a los del triángulo ZAB [VI 8], proporcionalmente, como AB es a BZ , así BZ a BA [VI 4]. Y como las tres rectas son proporcionales, como la primera es a la tercera, así el cuadrado de la primera al cuadrado de la segunda [V Def. 9; VI 20 Por.], entonces, como AB es a BA , así el cuadrado de AB al (cuadrado) de BZ ; luego, por inversión, como AB es a BA , así el cuadrado de ZB al cuadrado de BA . Pero AB es el triple de BA ; entonces el cuadrado de ZB es el triple del cuadrado de BA . Pero el cuadrado de AA es el cuádruple del (cuadrado) de AB , porque AA es el doble de AB ; entonces el cuadrado de AA es mayor que el cuadrado de ZB ; luego AA es mayor que ZB ; por tanto, AA es mucho mayor que ZB . Y si AA se corta en extrema y media razón, su segmento mayor es $K\Lambda$, porque AK es un lado del hexágono y KA del decágono [XIII 9]; pero si ZB se corta en extrema y media razón, su segmento mayor es NB ; entonces $K\Lambda$ es mayor que NB . Pero $K\Lambda$ es igual a AM ; luego AM es mayor que NB . Por tanto, el lado MB que es el (lado) del icosaedro es mucho mayor que NB que es el lado del dodecaedro. Q. E. D.

Digo ahora que, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura comprendida por (figuras) equiláteras y equiangulares iguales entre sí.

Porque no se construye un ángulo sólido con dos triángulos o, en absoluto, con dos planos. Sino que el ángulo de la pirámide se construye con tres triángulos, el del octaedro con cua-

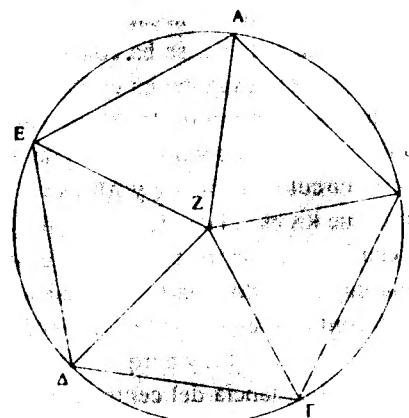
tro, el del icosaedro con cinco; pero no se construirá un ángulo sólido mediante seis triángulos equiláteros y equiangulares (colocados) en un sólo punto; porque si el ángulo del triángulo equilátero es dos tercios de un recto, los seis serán iguales a dos rectos; lo cual es imposible, porque todo ángulo sólido es comprendido por menos de cuatro rectos [XI 21]. Por lo mismo, tampoco se construye un ángulo sólido con más de seis ángulos planos. Y el ángulo del cubo es comprendido por tres cuadrados; por cuatro es imposible, porque serán a su vez cuatro rectos. Y el (ángulo) del dodecaedro es comprendido por tres pentágonos equiláteros y equiangulares; por cuatro es imposible, porque, siendo el ángulo del pentágono equilátero un recto más un quinto, los cuatro ángulos serán mayores que cuatro rectos; lo cual es imposible. Y un ángulo sólido tampoco será comprendido por otros polígonos en razón de la misma imposibilidad.

Por consiguiente, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura sólida comprendida por (figuras) equiláteras y equiangulares. Q. E. D.⁷⁶

⁷⁶ Como ya se ha sugerido en la nota introductoria a la geometría del espacio (*vid. supra*, nota 49), las connotaciones cosmológicas y simbólicas de los poliedros regulares, en las tradiciones neoplatónica y neopitagórica, dieron a su estudio una coloración especial. Hasta el punto de que el mismo Proclo, en su comentario al libro I de los *Elementos*, asegura que un objetivo capital de Euclides era precisamente el de cerrar con este broche de oro su composición —la verdad es que Euclides nada deja entrever en tal respecto—. Sea como fuere, este colofón del libro XIII, la existencia de justamente cinco poliedros regulares distintos, no ha dejado de atraer la atención hasta nuestros días. En cierto sentido, esta determinación de cinco, ni más ni menos, reviste menos importancia que la generación del concepto mismo de regularidad —en la que bien pudo desempeñar un papel decisivo la contribución de Teeteto, *vid. W. C. WATERHOUSE, «The discovery of the regular solids», Archive for History of Exact Sciences 9 (1972), 212-221*—. Por otro lado, según es bien sabido, en el resultado de Euclides ha de sobrentenderse que los poliedros regulares en

LEMA

Hay que demostrar de la siguiente manera que el ángulo del pentágono equilátero y equiangular es un recto más un quinto.



Pues sea ABΓΔΕ un pentágono equilátero y equiangular y circunscríbase en torno a él el círculo ABΓΔΕ, y tómese su centro Z; trácese ZA, ZB, ZΓ, ZΔ, ZE. Entonces dividen en dos partes iguales los ángulos correspondientes a A, B, Γ, Δ, E del pen-

cuestión son convexos. Pero además de este supuesto adicional, resultan pertinentes otras precisiones añadidas a un concepto restringido de convexidad, si se quiere salvar esa identificación de cinco y sólo cinco. En nuestro siglo (e. g. a partir del estudio enciclopédico de E. STEINITZ, 1916, sobre los poliedros), el resultado de Euclides se asume en el contexto de una definición de la regularidad en términos de equivalencia bajo simetrías: un poliedro es regular si su grupo de simetrías se comporta transitivamente con respecto al triplete compuesto por los elementos: cara, arista, vértice, todos ellos mutuamente incidentes. *Vid. el informe de B. GRUNBAUM, «Regular Polyedra», en I. GRATTAN-GUINNESS, (ed.) Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, Londres-Nueva York, 1994; t. 2, 7.2, págs. 866-876.* Por lo demás, tanto el estudio de los poliedros regulares, en general, como la

tágono. Y como los cinco ángulos correspondientes a Z son iguales a cuatro rectos y son iguales, entonces uno de ellos, como el AZB, es un recto menos un quinto; luego los restantes ángulos ZAB, ABZ son un recto y un quinto. Pero el ángulo ZAB es igual al ángulo ZBF; por tanto, el ángulo entero ABF del pentágono es un recto y un quinto. Q. E. D.

consideración de otras diversas clases de poliedros, siguen siendo temas cultivados en nuestros días. Una muestra de lo primero es la extensión del concepto de poliedro regular a espacios hiperbólicos y otros espacios n-dimensionales, e. g. en la línea de H. S. M. COXETER, *Regular Polytopes*, Nueva York, 1973¹, y *Regular Complex Polytopes*, Cambridge, 1991². Una muestra de lo segundo es la investigación de poliedros isogonales, i. e. aquellos cuyos vértices son todos ellos equivalentes bajo las simetrías del poliedro, e. g. en la línea de B. GRÜNBAUM y G. C. SHEPHARD, «Polyhedra with transitivity properties», *Comptes rendues, Acad. des Sciences, Soc. Royale Canada* 6 (1984), 61-66. Naturalmente, de todo esto no se desprende que Euclides siga siendo un geómetra contemporáneo, o que el lenguaje de los *Elementos* nunca haya dejado de ser una lengua matemática viva y de uso obligado. Más bien se desprende lo contrario. Pero al margen de este punto —que, por cierto, toca un tema de palpitante actualidad entre los historiadores de las matemáticas, el tema de si hay o no revoluciones científicas y cambios de paradigma en estas ciencias, cf. e. g. D. GILLIES, ed., *Revolutions in Mathematics*, Oxford, 1992—, es difícil negarse a reconocer el olfato de los antiguos matemáticos griegos para dar con temas de importancia básica, con cuestiones de permanente interés y con objetos capaces de seducir a gentes de diversos tiempos y culturas. Si estas formas de proyección son una de las marcas de un «autor clásico», hay autores clásicos griegos tanto en el campo de las artes y las letras como en el campo del conocimiento y del método científico: los hay a pesar de los prejuicios «literarios» que dan en limitar el legado griego al ámbito de las humanidades; los hay a pesar de los prejuicios «científicos» que dan en suponer que el conocimiento no puede desarrollarse sin matar al padre. Euclides es un autor clásico.

ÍNDICE GENERAL

	<u>Págs.</u>
NOTA DE LA TRADUCTORA	7
LIBRO X	9
LIBRO XI	199
LIBRO XII	267
LIBRO XIII	313

ELEMENTOS